幾何学特別講義 IV レポート問題 3（2016 年 12 月 1 日）解説・コメント

担当：境 圭一

Mayer-Vietoris 完全列は，単体複体 X が部分複体の和 $X = X_1 \cup X_2$ の形に書かれ，$X_1 \cap X_2$ も単体複体であるとき，$H_i(X_1), H_i(X_2), H_i(X_1 \cap X_2)$ がわかっていれば $H_i(X)$ も（ある程度）わかる，というものです．従って，$X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ がどういう単体複体か調べないと，$H_i(X)$ の計算はできないはずです．例えば K_0 を $L_i := K(\sigma_i) \setminus \{\sigma_i\}$ $(i = 1, 2)$ の和に分けたとして，$L_1 \cap L_2 = \Delta^{n-1}$ であることが明記されていなければ，かなり減点されることになります．

以下，K_0, K_1, K_2 それぞれについて，計算方法の一例（の概略）を述べます．まず $K(\sigma_i) = \Delta^n$, $K(\sigma_i) \setminus \{\sigma_i\} = \partial\Delta^n$ ですから，講義でやったように

$$H_k(K(\sigma_i)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \qquad H_k(K(\sigma_i) \setminus \{\sigma_i\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n-1 \\ 0 & k \neq 0, n-1 \end{cases}$$

です．

● K_0 について，$i = 1, 2$ に対し $L_i := K(\sigma_i) \setminus \{\sigma_i\}$ とおくと $K_0 = L_1 \cup L_2$, また $L_1 \cap L_2 = K(|v_0 \cdots v_{n-1}|) = \Delta^{n-1}$ です．よって Mayer-Vietoris 完全列の $n-1$ 次のところは，$n \geq 3$ より $n-1, n-2 \geq 1$ であることに注意すると

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n-1}(\Delta^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(L_1) \oplus H_{n-1}(L_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(K_0) \arrow[r] & H_{n-2}(\Delta^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& 0 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & 0 &
\end{tikzcd}$$

となって，$H_{n-1}(K_0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ がわかります．$k \geq 2, k \neq n-1$ のところは

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_k(L_1) \oplus H_k(L_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_k(K_0) \arrow[r] & H_{k-1}(\Delta^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

より $H_k(K_0) = 0$ です．$k = 1$ のところは，$n \geq 3$ より $H_1(L_i) = 0$ なので

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_1(L_1) \oplus H_1(L_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_1(K_0) \arrow[r] & H_0(\Delta^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0(L_1) \oplus H_1(L_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& 0 & & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

ですが，$H_0(\Delta^{n-1}) \to H_0(L_1) \oplus H_1(L_2)$ は $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $1 \to (1, 1)$ ですから単射，従って $H_1(K_0) \to H_0(\Delta^{n-1})$ は単射かつ 0 写像となり，$H_1(K_0) = 0$ がわかります．K_0 は弧状連結ゆえ $H_0(K_0) \cong \mathbb{Z}$ ですから，まとめると

$$H_k(K_0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & k = n-1 \\ 0 & k \neq 0, n-1 \end{cases}$$

です．$|K_0| \simeq S^{n-1} \vee S^{n-1}$（一点和）であることが背景にあります．

● K_1 について，まず $L := (K(\sigma_1) \setminus \{\sigma_1\}) \cup K(\sigma_2)$ のホモロジー群を計算します．$L_1 := K(\sigma_1) \setminus \{\sigma_1\}$, $L_2 := K(\sigma_2)$ とおくと，K_0 の場合と同じように $L_1 \cap L_2 = \Delta^{n-1}$ ですから，まず

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n-1}(\Delta^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(L_1) \oplus H_{n-1}(L_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(L) \arrow[r] & H_{n-2}(\Delta^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& 0 & \mathbb{Z} \oplus 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

より $H_{n-1}(L) \cong \mathbb{Z}$ です．次に $k \geq 2, k \neq n-1$ のとき

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_k(L_1) \oplus H_k(L_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_k(L) \arrow[r] & H_{k-1}(\Delta^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

より $H_k(L) = 0$ です．1 次のところは

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_1(L_1) \oplus H_1(L_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_1(L) \arrow[r] & H_0(\Delta^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0(L_1) \oplus H_0(L_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& 0 & & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

ですが，K_0 のときと同じ理由で $H_1(L) \to H_0(\Delta^{n-1})$ が単射かつ 0 写像となり，$H_1(L) = 0$ を得ます．L は弧状連結なので $H_0(L) \cong \mathbb{Z}$ ですから，

$$H_k(L) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n-1 \\ 0 & k \neq 0, n-1 \end{cases}$$

です．これは $H_k(L_1)$ と同型であることがわかります．非輪状な L_2 をこの問題のようなやり方で L_1 に貼りつけてもホモロジー群は変わらなかった，ということです．$K_1 = L \cup K(\sigma_3)$ とみて，もう一度同様のステップを繰り返すと

$$H_k(K_1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n-1 \\ 0 & k \neq 0, n-1 \end{cases}$$

がわかります．詳細は省略します．$|K_1| \simeq S^{n-1}$ であることが背景にあります．

● K_2 について，$L_1 := K(\sigma_3) \cup K(\sigma_4)$, $L_2 := K(\sigma_5)$ とおきます．L_1 は $K(\sigma_3)$ と $K(\sigma_4)$ の一点和であることから，$k \geq 1$ のとき $H_k(L_1) \cong H_1(K(\sigma_3)) \oplus H_k(K(\sigma_4)) = 0$ です．また L_1 は弧状連結ですから $H_0(L_1) \cong \mathbb{Z}$ です．$L_1 \cap L_2$ はちょうど二つの頂点からなりますから

$$H_k(L_1 \cap L_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

です．これらを踏まえると，まず $k \geq 2$ のとき

$$\cdots \longrightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{H_k(L_1) \oplus H_k(L_2)} \longrightarrow H_k(K_2) \longrightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{H_{k-1}(L_1 \cap L_2)} \longrightarrow \cdots$$

より $H_k(K_2) = 0$ です．次に

$$\cdots \longrightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{H_1(L_1) \oplus H_1(L_2)} \longrightarrow H_1(K_2) \xrightarrow{\delta} \underset{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}}{H_0(L_1 \cap L_2)} \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \underset{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}}{H_0(L_1) \oplus H_0(L_2)} \longrightarrow \cdots$$

ですが，$(i_{1*}, i_{2*}) : H_0(L_1 \cap L_2) \to H_0(L_1) \oplus H_0(L_2)$ は $(1,0) \mapsto (1,1), (0,1) \mapsto (1,1)$ です．$(1,0)$ と $(0,1)$ は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の基底をなしますが，これらは $L_1 \cap L_2$ の二つの頂点が表すホモロジー類です．どちらの頂点も $H_0(L_1), H_0(L_2)$ それぞれの生成元ですから，上のような対応になります．よって $\mathrm{Ker}\,(i_{1*}, i_{2*}) \cong \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ です．これは $\mathrm{Im}\,\delta$ に一致しますが，δ が単射になることから $H_1(K_2) \cong \mathrm{Im}\,\delta \cong \mathbb{Z}$ です．K_2 が弧状連結であることも合わせると

$$H_k(K_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 1 \\ 0 & k \neq 0, 1 \end{cases}$$

です．$|K_2| \simeq S^1$ であることが背景にあります．

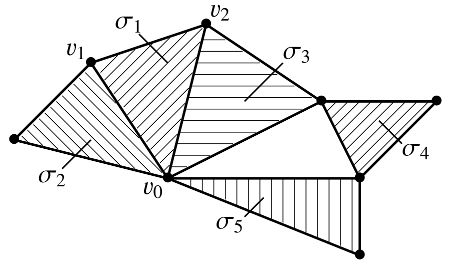

図 1　$n = 2$ の場合．実際は $n \geq 3$