幾何学特別講義 **IV** 演習問題 **10**（**2016** 年 **12** 月 **8** 日）

担当：境 圭一

問題 1. $D(\Delta^n)$ に含まれる k 単体の個数を求めよ．また $D(\partial\Delta^n))$ に含まれる k 単体の個数を求めよ．

問題 2. $n = 1, 2, 3$ に対し，$H_i(D(\Delta^n)), H_i(D(\partial\Delta^n))$ を定義通り計算し，それぞれ $H_i(\Delta^n), H_i(\partial\Delta^n)$ と同型であることを確認せよ．

問題 3. 単体複体 K について，$D(K)$ も単体複体であることの証明を完成させよ．

問題 4. 単体複体 K が部分複体の和集合 $K = K_1 \cup K_2$ の形に表され，$K_1 \cap K_2$ も単体複体であるとする．このとき

$$D(K) = D(K_1) \cup D(K_2), \quad D(K_1 \cap K_2) = D(K_1) \cap D(K_2)$$

であることを示せ．

問題 5. 単体複体 K の n 単体 $\sigma = |v_0 \cdots v_n|$ の面 $|v_{i_0} \cdots v_{i_k}|$ の重心を $v_{i_0 \dots i_k}$ と書く．$D_n : C_n(K) \to C_n(D(K))$ を，講義では帰納的に定義したチェイン写像とするとき

$$D_n\langle v_0 \cdots v_n\rangle = \sum_{\rho \in S_{n+1}} \mathrm{sign}(\rho)\langle v_{\rho(0)} v_{\rho(0)\rho(1)} \cdots v_{\rho(0)\dots\rho(n)}\rangle$$

が成り立つことを示せ．ただし $n+1$ 次対称群 S_{n+1} の元 ρ は全単射 $\rho : \{0, \dots, n\} \to \{0, \dots, n\}$ とみなす．

問題 6. n 単体 $\sigma^n = |v_0 \cdots v_n|$ に対し

$$\mathrm{Int}(\sigma^n) := \Big\{ \sum_{0 \le i \le n} a_i v_i \in \sigma^n \mid a_0, \dots, a_n > 0 \Big\}$$

と定める．

(1) $n = 0, 1, 2, 3$ に対し，$\mathrm{Int}(\sigma^n)$ を図示せよ．

(2) 任意の $x \in \sigma^n$ に対し，$x \in \mathrm{Int}(\tau)$ となる面 $\tau < \sigma^n$ がちょうど一つ存在することを示せ．

(3) K を単体複体とするとき，任意の $x \in |K|$ に対し，$x \in \mathrm{Int}(\sigma)$ となる $\sigma \in K$ がちょうど一つ存在することを示せ．

(4) 講義でやった補題 6.5 を参考に，$\tau_0 < \cdots < \tau_k < \sigma^n$ に対し，$\mathrm{Int}(|\widehat{\tau_0} \dots \widehat{\tau_k}|) \subset D(\sigma^n)$ を具体的に記述せよ．

補足．12/1 に 5 項補題のことをやったとき，少し仮定が強すぎたので補足します．講義でやったときの記号で，次が成り立ちます：

(1) h_1 が全射，h_2, h_4 が単射ならば，h_3 は単射

(2) h_5 が単射，h_2, h_4 が全射ならば，h_3 は全射

系として，h_1 が全射，h_5 が単射，h_2, h_4 が同型ならば，h_3 は同型です．

$K \to L$ を単体写像とします．単体写像の定義を思い出すと，例えば 1 単体は 1 単体にうつるか，または 0 単体につぶれるしかなく，したがって 1 骨格 $K^{(1)}$ の像は非常に大雑把な折れ線にしかならないことがわかります．重心細分 $D(L)$ の絵を描くとわかるように，一般に $D(L)$ の単体は L の単体より（Euclid 距離の意味で）小さくなるので，単体写像による $K^{(1)}$ の像は，元の L の場合よりきめ細かい折れ線になり得ます．このように，重心細分を（繰り返し）取ることにより，単体写像は連続写像に近づいていきます．このことは，正確には**単体近似定理**という形で次回あたりに述べられます．証明はしないかもしれません．

なお，$D(K)$ は元の K より単体の数が増えるので，ホモロジー群の計算を楽にしてくれるものではありません．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_homology/16_homology.html