幾何学特別講義 **IV** レポート問題 **4**（**2016** 年 **12** 月 **15** 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号最後のアルファベットが

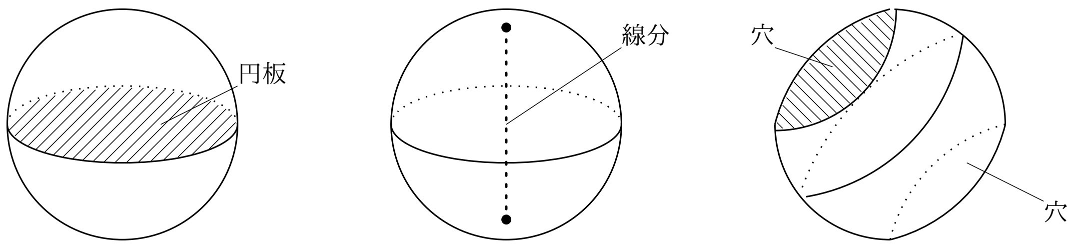
- A, C のとき $n = 0$,
- D, E, F, H のとき $n = 1$,
- G, J, K のとき $n = 2$

とする．

$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とおく．位相空間

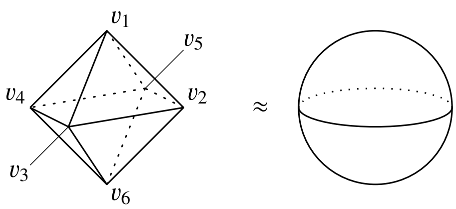
$$X_n := \begin{cases} S^2 \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} & n = 0, \\ S^2 \cup \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1\} & n = 1, \\ \{(x, y, z) \in S^2 \mid -\dfrac{1}{2} \leq z \leq \dfrac{1}{2}\} & n = 2 \end{cases}$$

のホモロジー群を計算せよ．



X_0　　X_1　　X_2（を少し傾けたもの）

ヒント：次の 2 次元単体複体（八面体の境界）で与えられる S^2 の単体分割を使うとわかりやすいかもしれない：



0 単体は $v_1, \ldots, v_6$ の 6 つ，1 単体は 12 本，2 単体は $|v_i v_j v_k|$ $(i = 1, 6, (j, k) = (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 2))$ の 8 枚．
演習問題 11 も参照せよ．

※締切：**1/5**（木）の講義開始時

※代理提出可です

※締切前の提出も受け付けます．研究室にお越しください．

幾何学特別講義 IV 演習問題 11（2016 年 12 月 15 日）

担当：境 圭一

※提出の必要はありません．レポート問題は裏面をご覧ください．

問題 1. $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1), v_3 = (-1,0), v_4 = (0,-1)$ とする．

(1) $K = \{|v_1|, |v_2|, |v_3|, |v_4|, |v_1v_2|, |v_2v_3|, |v_3v_4|, |v_4v_1|\}$ とおく．K は単体複体で，$|K| \approx S^1$（同相）であることを示せ．

(2) $H_n(S^1)\ (= H_n(K))$ を計算せよ．

(3) $S^1 \approx |\partial\Delta^2|$ であることを示せ．これを使って $H_n(S^1)$ を計算し，(2) と比較せよ．

(4) $L := K \cup \{|v_1v_3|\}$ とおく．L は単体複体であることを示し，$H_n(L)$ を計算せよ．$|L|$ はどんな位相空間と同相か？

(5) $|L| \simeq S^1 \vee S^1$（ホモトピー同値）を示せ．ただし $\vee$ は一点和を表す．$H_n(L)$ と $H_n(S^1 \vee S^1)$ を比較せよ．

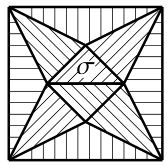
問題 2. $X := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1\} \cup \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0\}$ とおく．

(1) xy 平面上に 2 単体 $\sigma = |v_0v_1v_2|$ を取り，$v_3 := (0,0,1)$ とおいて $K := K(\sigma) \cup \{|v_3|, |v_3v_0|, |v_3v_1|\}$ とおく．K は単体複体で，$|K| \approx X$ であることを示せ．

(2) $H_n(X)$ を計算せよ．

(3) $X \simeq S^1$（ホモトピー同値）であることを示せ．$H_n(X)$ と $H_n(S^1)$ を比較せよ．

問題 3. $K \subset \mathbb{R}^2$ を図のような 2 次元単体複体とする．



(1) $|K| \approx D^2$ であることを示せ．

(2) 図中の 2 単体 σ に対し，$A := K \setminus \{\sigma\}$ とおく．$|A|$ はどんな位相空間と同相か？

(3) $H_n(A)$ を計算せよ．

(4) $|A| \simeq S^1$（ホモトピー同値）であることを示せ．$H_n(A)$ と $H_n(S^1)$ を比較せよ．

問題 4. 講義で省略した次のことを示せ：単体写像 $\Phi, \Psi : K \to L$ がともに連続写像 $f : |K| \to |L|$ の単体近似であるとする．このとき，各 $\sigma = |v_0 \cdots v_n| \in K$ に対し $\tau \in L$ が存在し，$\Phi(v_0), \dots, \Phi(v_n), \Psi(v_0), \dots, \Psi(v_n)$ は τ の頂点である．また $h_n : C_n(K) \to C_{n+1}(L)$,

$$h_n\langle v_0 \cdots v_n\rangle := \sum_{0 \le i \le n} (-1)^i \langle \Phi(v_0) \cdots \Phi(v_i)\Psi(v_i) \cdots \Psi(v_n)\rangle$$

は Φ_* と Ψ_* の間のチェインホモトピーである．

補足．12/15 にやったことにより，単体分割可能な位相空間 X のホモロジー群 $H_n(X)$ を，単体分割 $X \approx |K|$ を一つ取って $H_n(X) := H_n(K)$ で定義することができるようになりました．この定義は K の取り方によりません．
基本的な例として，同相

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1\} \approx |\Delta^n|, \quad S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \approx |\partial\Delta^{n+1}|$$

と講義でやったことを合わせると，次のことがわかります：

$$H_k(D^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, \\ 0 & k \neq 0, \end{cases} \qquad H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n, \\ 0 & k \neq 0, n. \end{cases}$$

一般には，$D^n \approx \Delta^n$ や $S^n \approx \partial\Delta^{n+1}$ をうまく貼り合わせて，$|K| \approx X$ となるような K を構成します．このとき，K が単体複体になるよう注意してください．例えば 4 本の 1 単体 $|v_0v_1|, |v_1v_2|, |v_2v_3|, |v_3v_0|$ でできた四角形を円板 (D^2) で埋めたいときは，2 枚の 2 単体 $|v_0v_1v_2|, |v_0v_2v_3|$ を使って埋める必要があります．問題 1〜3 を参照してください．