幾何学特別講義 IV レポート問題 4（2016 年 12 月 15 日）解説・コメント

担当：境 圭一

ヒントに与えた単体複体（八面体）を K とおくとき，例えば

$$L_n := \begin{cases} K \cup \{|v_2v_3v_5|, |v_3v_4v_5|\} & n=0, \\ K \cup \{|v_1v_6|\} & n=1, \\ K \setminus \{|v_1v_2v_3|, |v_4v_5v_6|\} & n=2 \end{cases}$$

とおけば $X_n \approx |L_n|$, よって $H_k(X_n) \cong H_k(L_n)$ です．Mayer-Vietoris 完全系列を使ってもいいのでしょうが，定義通り計算してしまうのが最も簡単だと思います．答えは

$$H_k(X_0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0, \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & k=2, \\ 0 & k \neq 0,2, \end{cases} \qquad H_k(X_1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0,1,2, \\ 0 & k\neq 0,1,2, \end{cases} \qquad H_k(X_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0,1, \\ 0 & k \neq 0,1 \end{cases}$$

です．もう少し詳細に書くと，例えば

$$\begin{aligned}
&H_0(L_n) \cong \langle \langle v_1 \rangle \mid \rangle \cong \mathbb{Z} \quad (n=0,1,2), \\
&H_2(L_0) \cong \langle \langle v_1v_2v_3 \rangle + \langle v_1v_3v_4 \rangle + \langle v_1v_4v_5 \rangle + \langle v_1v_5v_2 \rangle - \langle v_2v_3v_5 \rangle - \langle v_3v_4v_5 \rangle, \\
&\qquad\qquad \langle v_6v_2v_3 \rangle + \langle v_6v_3v_4 \rangle + \langle v_6v_4v_5 \rangle + \langle v_6v_5v_2 \rangle - \langle v_2v_3v_5 \rangle - \langle v_3v_4v_5 \rangle \mid \rangle \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, \\
&H_1(L_1) \cong \langle \langle v_1v_2 \rangle + \langle v_2v_6 \rangle + \langle v_6v_1 \rangle \mid \rangle \cong \mathbb{Z}, \\
&H_2(L_2) \cong \langle \langle v_1v_2v_3 \rangle + \langle v_1v_3v_4 \rangle + \langle v_1v_4v_5 \rangle + \langle v_1v_5v_2 \rangle - \langle v_6v_2v_3 \rangle - \langle v_6v_3v_4 \rangle - \langle v_6v_4v_5 \rangle - \langle v_6v_5v_2 \rangle \rangle \cong \mathbb{Z}, \\
&H_1(L_2) \cong \langle \langle v_2v_3 \rangle + \langle v_3v_4 \rangle + \langle v_4v_5 \rangle + \langle v_5v_2 \rangle \mid \rangle \cong \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

です．それぞれの生成元がどのような図形に対応しているか，絵を描いて確かめてみてください．上記の生成元の取り方は一例で，他にも取り方がある場合もあります．例えば

$$H_1(L_1) \cong \langle \langle v_1v_4 \rangle + \langle v_4v_6 \rangle + \langle v_6v_1 \rangle \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$$

も正解です．実際，

$$\begin{aligned}
(\langle v_1v_2 \rangle + \langle v_2v_6 \rangle + \langle v_6v_1 \rangle) - (\langle v_1v_4 \rangle + \langle v_4v_6 \rangle + \langle v_6v_1 \rangle) &= \langle v_1v_2 \rangle + \langle v_2v_6 \rangle + \langle v_6v_4 \rangle + \langle v_4v_1 \rangle \\
&= \partial_2(\langle v_1v_2v_3 \rangle + \langle v_1v_3v_4 \rangle - \langle v_2v_3v_6 \rangle - \langle v_3v_4v_6 \rangle)
\end{aligned}$$

が確かめられますから，$H_1(L_1)$ の元としては $\langle v_1v_2 \rangle + \langle v_2v_6 \rangle + \langle v_6v_1 \rangle = \langle v_1v_4 \rangle + \langle v_4v_6 \rangle + \langle v_6v_1 \rangle$ です．