幾何学特別講義 IV 演習問題 12（2017 年 1 月 5 日）

担当：境 圭一

問題 1. レポート問題 4 の X_n $(n=0,1,2)$ について，$X_0 \simeq S^2 \vee S^2, X_1 \simeq S^1 \vee S^2, X_2 \simeq S^1$（ホモトピー同値）であることを示せ．ただし $\vee$ は一点和を表す．これらを用いて $H_k(X_n)$ を計算せよ．

問題 2. $I := [0,1]$ とする．各 $0 \le t \le 1$ について，$I \times I$ 上の点 $(0,t)$ と $(1,t)$, $(t,0)$ と $(t,1)$ をそれぞれ同一視して得られる図形 T を**トーラス** (torus) とよぶ（つまり，正方形の紙の向かい合う辺を「同じ向きで」貼り合わせて得られる浮き輪である）．$T \approx S^1 \times S^1$（同相）を示せ．T から開円板 $D := \{(s,t) \in I \times I \mid (s-(1/2))^2 + (t-(1/2))^2 < 1/16\}$ を除いて得られる図形 $T^\circ := T \setminus D$ について，$T^\circ \simeq S^1 \vee S^1$ であることを示せ．これを用いて $H_k(T^\circ)$ を計算せよ．

問題 3. 各 $0 \le t \le 1$ について，$I \times I$ 上の点 $(0,t)$ と $(1,1-t)$ を同一視して得られる図形 M を**メビウスの帯** (Möbius band) とよぶ（つまり，正方形の紙の縦の辺を「逆向きで」貼り合わせて得られる「裏表の区別のない帯」である）．$H_k(M)$ を計算せよ．

問題 4. $\mathbb{R}^N = \{(x_1,\dots,x_N,0)\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ とみなす．$v \in \mathbb{R}^N$ に対し，$\underline{v} := (v,0), \overline{v} := (v,1) \in \mathbb{R}^{N+1}$ とおく．$v_0,\dots,v_n \in \mathbb{R}^N$ が一般の位置にあるとき，$0 \le \forall i \le n$ に対し $\underline{v_0},\dots,\underline{v_i},\overline{v_i},\dots,\overline{v_n} \in \mathbb{R}^{N+1}$ も一般の位置にあることを示せ．

問題 5. n 単体 $\sigma^n := |v_0 \cdots v_n|$ について，柱体 $\sigma^n \times I := \{|\underline{v_0} \cdots \underline{v_i}\overline{v_i} \cdots \overline{v_n}|$ の面 $\mid 0 \le i \le n\}$ が単体複体であることを，次の手順で示せ．

(1) $n=0$ のとき，$\sigma^0 \times I$ が単体複体の定義をみたすことを直接確かめよ．

(2) $n \ge 1$ のとき，$\sigma^{n-1} \times I$ が単体複体であると仮定する．$L := (\sigma^{n-1} \times I) \cup K(|\underline{v_0} \cdots \underline{v_n}|)$ は単体複体であることを示せ．また $\sigma^n \times I = \overline{v_n} * L$ であることを示せ．ただし単体 τ に対し，$K(\tau)$ は τ の面全体からなる単体複体を表す．（ヒント：定義により，$\sigma^n \times I$ のすべての単体は $\overline{v_n}$ を頂点に持つ単体の面である）

問題 6. K, L, M を単体複体とする．

(1) $\Phi : K \to L, \Psi : L \to M$ を単体写像とする．$\Psi \circ \Phi : K \to M$ も単体写像であることを示せ．

(2) Φ, Ψ がホモロジー群に誘導する準同型を Φ_*, Ψ_* と書く．$(\Psi \circ \Phi)_* = \Psi_* \circ \Phi_*$ を示せ．

(3) $f : |K| \to |L|, g : |L| \to |M|$ を連続写像とし，これらがホモロジー群に導く準同型を f_*, g_* と書く．$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ を示せ．

補足．1/5 にやったことにより，位相空間 X 自体が単体分割可能でなくても，単体分割可能な Y とホモトピー同値であれば，X のホモロジー群 $H_k(X)$ を $H_k(X) := H_k(Y)$ $(= H_k(K)$, ただし K は単体複体で $|K| \approx Y)$ で定義することができます．実際，Y' も同じ条件をみたすとすれば，$Y \simeq X \simeq Y'$（ホモトピー同値）ですから $H_k(Y') \cong H_k(Y)$ です．つまり，$H_k(X)$ は Y の選び方によらずに決まります．
ホモロジー群がホモトピー不変であることがわかると，計算は劇的に容易になります．問題 1 にあるように，ホモトピー不変性を知っていれば，レポート問題 4 はずっと易しかったことでしょう．また，これまでは $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1\} \approx |\Delta^n|$ のホモロジー群も決して易しくはありませんでしたが，D^n は**可縮** (contractible), つまり $D^n \simeq \{$ 一点 $\}$ であることから，ただちに $H_0(D^n) \cong \mathbb{Z}, H_k(D^n) = 0$ $(k \ge 0)$ がわかります．それなら最初からホモトピー不変性を証明すればよかったのでは，という気にもなりますが，例えば重心細分がホモロジー群を変えないことを示すときに $H_k(D^n)$ の計算結果が必要でしたから，決して不要な回り道をしたわけではありません．
トーラス $S^1 \times S^1$ のホモロジー群は，定義通りに計算するといかに大変なことになるかが参考書に書いてありますが，ホモトピー不変性を示した後なら，もうちょっと健全な計算が可能で，問題 2 はその準備です．T° は穴が開いて使えなくなった浮き輪のような図形です．問題 2 の記述は少し不正確で，$I \times I$ のいくつかの点を同一視する，すなわち同値関係で割るという全射を $p : I \times I \to T$ とおくとき，正確には $T^\circ := T \setminus p(D)$, もしくは $T^\circ := p(I \times I \setminus D)$ と定義すべきところです．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_homology/16_homology.html