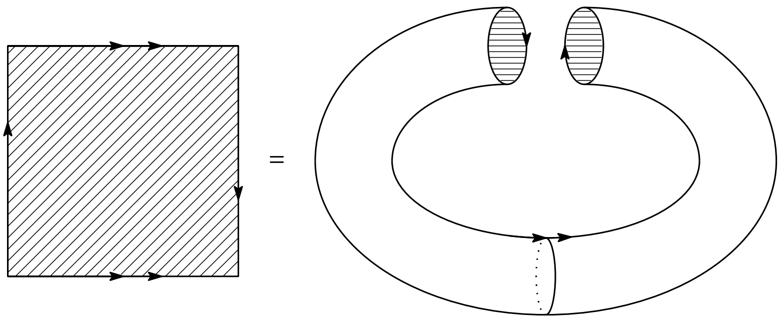
幾何学特別講義 IV レポート問題 5（2017 年 1 月 12 日）

担当：境 圭一

$I := [0,1]$ とし，$I \times I$ の向かい合う辺を図のように同一視して得られる空間を X とおく．$H_n(X)$ を計算せよ．



ヒント．トーラスの場合と同様に，$I \times I$ 内部の円（に同相な部分）と，それ以外の部分に分けるとよい．どちらもホモトピーで変形すれば簡単な図形になる．

注意．右上図で，貼り合わせる二つの円の向きが逆になっているため，X はトーラスではない．X はクラインの壺 (Klein bottle) と呼ばれる図形で，3 次元空間内に描こうとすると自己交差を生じざるを得ない（つまり，$\mathbb{R}^3$ には埋め込めない）．例えば

`https://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle`

に見やすい絵が載っているので，参照してください．

※締切：**1/19**（木）の講義開始時

※代理提出可です

※締切前の提出も受け付けます．研究室にお越しください．

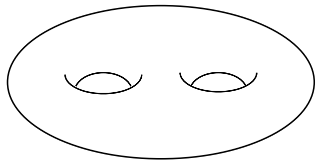
幾何学特別講義 **IV** 演習問題 **13**（**2017** 年 **1** 月 **12** 日）

担当：境 圭一

※提出の必要はありません．レポート問題は裏面をご覧ください．

問題 1. (1) 二つのトーラス T_1, T_2 を用意する．それぞれから開円板を取り除いて得られる図形 T_1°, T_2° を考え（演習問題 12-3 参照），穴の境界 ($\approx S^1$) に沿ってこれらを貼り合わせた図形 $T_1^\circ \cup T_2^\circ$ を Σ_2 と書く（「二人乗りの浮き輪」である）．$H_n(\Sigma_2)$ は次のようになることを，実際に計算して確かめよ：

$\Sigma_2 \approx$



$$H_n(\Sigma_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^{\oplus 4} & n = 1, \\ 0 & n \geq 3. \end{cases}$$

(2) 2 次元球面 S^2 を Σ_0, トーラスを Σ_1 と書く．$g \geq 2$ について Σ_{g-1} が定義されているとし，Σ_g を，Σ_{g-1} から開円板を取り除いて得られる図形 Σ_{g-1}° と Σ_1° を境界に沿って貼り合わせて得られる図形とする．$H_n(\Sigma_g)$ は次のようになることを，実際に計算して確かめよ：

$$H_n(\Sigma_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^{\oplus 2g} & n = 1, \\ 0 & n \geq 3. \end{cases}$$

問題 2. g, h は 0 以上の整数で，$g \neq h$ とする．このとき Σ_g と Σ_h はホモトピー同値でないことを示せ．

問題 3. m, n は 0 以上の整数で，$m \neq n$ とする．このとき S^m と S^n はホモトピー同値でないことを示せ．

問題 4. m, n を自然数とし，同相写像 $f : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$ が存在すると仮定する．
(1) $x \in \mathbb{R}^m$ を一つ選び，$y := f(x) \in \mathbb{R}^n$ とおく．$f|_{\mathbb{R}^m \setminus \{x\}} : \mathbb{R}^m \setminus \{x\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ は同相写像であることを示せ．
(2) $\mathbb{R}^m \setminus \{x\} \simeq S^{m-1}$（ホモトピー同値）であることを示せ．
(3) $f|_{\mathbb{R}^m \setminus \{x\}}$ がホモロジー群の同型を導くことを使って，$m = n$ であることを示せ．

補足．一般に位相空間 X, Y がホモトピー同値**でない**ことの証明は難しく，その理由は，**無限個**ある連続写像 $X \to Y$ のすべてがホモトピー同値写像でないことを示さなければならないからです．しかしホモロジー群のホモトピー不変性，つまり $|K| \simeq |L| \implies H_n(K) \cong H_n(L)\ (\forall n \geq 0)$ であることの対偶を取ると

$$H_n(K) \not\cong H_n(L),\ \exists n \geq 0 \implies |K| \not\simeq |L|$$

がわかります．よって，**ある一組**の群が同型でないことさえ示されれば，X と Y はホモトピー同値でないことがわかります．これは非常に便利で，問題 2, 3, 4 はこのことの典型的な応用例です．
境界のないコンパクトな 2 次元多様体を**閉曲面** (closed surface) とよびます．その中で向きづけ可能なもの（平たく言うと表裏の区別をつけられるもの）は，ある $g \geq 0$ に対し問題 1 の Σ_g と同相であることが知られています．よって向きづけ可能な閉曲面のホモロジー群は問題 1 で完全に計算できたことになり，問題 2 により，二つの向きづけ可能な閉曲面がホモトピー同値か否かは 1 次ホモロジー群で完全にわかることになります．実は向きづけ不可能なものについても事情は同じです．射影平面や Klein の壺は向きづけ不可能な閉曲面の典型例です．
同じことは 3 次元以上の多様体に対しては成り立たず，例えば S^3 と同じホモロジー群を持つが S^3 でない 3 次元閉多様体はたくさんあります．このような多様体を（整）ホモロジー 3 球面とよび，その分類は現在でも重要な未解決問題です．