幾何学特別講義 **IV** レポート問題 **5**（**2017** 年 **1** 月 **12** 日）解答・コメント

担当：境 圭一

結論は

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2) & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

です．

トーラスの場合と同じようにして計算できます．適当な単体分割 K を取り，正方形内部の 2 単体 σ を一つ選んで

$$K_1 := K(\sigma), \quad K_2 := K \setminus \{\sigma\}$$

とおいて Mayer-Vietoris 完全系列を使います．

$H_1(K_1 \cap K_2) \cong H_1(\partial\Delta^2) \cong \mathbb{Z}$ で $1 \in \mathbb{Z}$ に対応する元として，$\partial\sigma$ を一周回るループに対応する 1 サイクルを取れます．これを $x \in H_1(K_1 \cap K_2)$ としておきます．トーラスの場合と同じように $H_1(K_2) \cong H_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z}$ ですが，生成元 $(1, 0)$ と $(0, 1)$ に対応する元として，正方形の「縦の辺」と「横の辺」に対応するサイクルを取れます．これらをそれぞれ $y, z \in H_1(K_2)$ とおきます．トーラスの場合との違いは，包含写像 $i_2 : K_1 \cap K_2 \to K_2$ が導く写像 $i_{2*} : H_1(K_1 \cap K_2) \to H_1(K_2)$ が $i_{2*}(x) = 2y$ となっていること，つまり

$$\begin{array}{ccc} H_1(K_1 \cap K_2) & \xrightarrow{i_{2*}} & H_1(K_1) \\ \| & & \| \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \end{array} \qquad 1 \mapsto (2, 0)$$

とみなせることです．このことを使うと $H_1(X) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(2\mathbb{Z} \oplus 0) \cong (\mathbb{Z}/2) \oplus \mathbb{Z}$ がわかります．

単に "$H_1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$" だと "$2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$" と述べているように見えて，部分群としての入り方が曖昧です．$2\mathbb{Z}$ は偶数全体のなす Abel 群だと解釈するとしても，例えば

$$2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad 2k \mapsto (2k, 4k)$$

という包含写像も考えられます．