幾何学特別講義 **IV** 演習問題 **14**（**2017** 年 **1** 月 **19** 日）

担当：境 圭一

※例えば「トポロジー」（田村一郎，岩波書店）を参照してください

問題 1. 講義でやった方法をまねて，向きづけ不可能な閉曲面は $2n$ 角形の辺を

$$x_1x_1\cdots x_nx_n$$

と同一視して得られることを示せ．この閉曲面のホモロジー群を計算せよ．

問題 2. K を S^2 の単体分割とし，K の 0 単体，1 単体，2 単体の数をそれぞれ l, m, n とする．

(1) K のチェイン複体

$$0 \longrightarrow C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0$$

のホモロジー群が $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$ $(n=0,2)$, $H_n(K)=0$ $(n \neq 0,2)$ をみたすことと次元定理を使って，$l-m+n=2$ を示せ．これを **Euler の多面体定理**という．

(2) n 面体は

- 各面が正多角形で，
- 各頂点に集まる辺の本数が一定である

とき**正 n 面体**であるという．正 n 面体が存在するような n は，$n=4,6,8,12,20$ に限ることを示せ．

補足．この講義で述べたことは

- 単体複体のホモロジー群，そのホモトピー不変性
- $H_*(D^n), H_*(S^n), H_*(\Sigma_g), H_*(\mathbb{R}P^2)$ などの計算
- 向きづけ可能な閉曲面の分類など，簡単な応用

などでした．トポロジーの立場からは，ほかにも

- 特異ホモロジー論（単体分割可能でない位相空間についても定義できる）
- 胞体複体のホモロジー論（計算が簡単な場合が多い）
- 多様体のホモロジー論
- コホモロジー論，公理的（コ）ホモロジー論
- 一般コホモロジー論
- $\cdots$

など，やるべきこと，やりたいことはいくらでもあります．また，どんな数学をやっていても，ホモロジーに出会う可能性はあると思います．興味に応じて，然るべき参考文献にあたってみてください．

1/26 の講義では，上記の中からいくつかのトピックを選んで概説を試みたいと思います．演習問題は今回でおしまいにします．