**2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）演習問題 2**

担当：境 圭一

**問題 1**. 以下に挙げる，ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3)$ の部分集合 $W_i$ について，それらは $\mathbf{R}^n$ の部分空間かどうか答えよ．

(1) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$
(2) $W_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$
(3) $W_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2\}$
(4) $W_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$
(5) $W_5 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = z = 0$ または $z = x = 0$ または $x = y = 0\}$
(6) $W_6 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\}$

**問題 2**. ベクトル空間 $V$ の部分空間 $W_1, W_2$ について，その和空間

$$W_1 + W_2 := \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V \mid \boldsymbol{v}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in W_2\}$$

は $V$ の部分空間であることを示せ．

**問題 3**. 次の $\mathbf{R}^3$ の部分空間について，和空間 $W_1 + W_2$ は直和かどうか答えよ．

(1) $W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle,\quad W_2 = \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle,\quad$ ただし $\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle,\quad W_2 = \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle,\quad$ ただし $\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

**補足**．問題 1 で $\mathbf{R}^n$ の部分空間になっているのは $W_1, W_4, W_6$ です．証明としてはもちろん和とスカラー倍で閉じているかいないかを確認するわけですが，イメージとしては，$\mathbf{K}^n$ の部分空間とは「原点を通るまっすぐな部分集合」です．$W_1, \ldots, W_6$ を図示してみて，そのことを確かめてみてください．「まっすぐな」とは「1 次式で表せる」ということで，**線形**代数 (linear algebra) の名前の由来です．$W_5$ は，よく見ると三本の座標軸（原点を通る「まっすぐな」線）の和集合になっています．各々は部分空間ですが，その和集合である $W_5$ は部分空間ではありません（講義の注意 2.4 参照）．理由を考えてください．
問題 3 は，$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ なら $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$, そうでなければ直和ではありません．$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ などは，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線形結合で表されるベクトル全体の集合でした．例えば (1) なら

$$W_1 = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{R}^3 \mid a_1, a_2 \in \mathbf{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

です．$a_1 + a_2$ と $a_2$ は独立に変化できますから，$z$ 座標が 0 のベクトル全体の集合ということになります．すなわち，(1) の $W_1$ は $xy$ 平面のことです．