2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）演習問題 3

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

問題 1. 次の 3 項ベクトルの組は 1 次独立かどうか答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 0)$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 1)$

(3) $\boldsymbol{v}_1 = (2, 1, 0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 0, -1), \quad \boldsymbol{v}_3 = (0, -1, -2)$

問題 2. （講義の命題 3.5 (1), (3) 参照）

(1) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, 0, 0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 3, 0), \quad \boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1, 4) \in \mathbf{R}^4$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}_4 = (1, 0, -4, 8)$ とおく．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次従属であることを示せ．

(3) $\boldsymbol{v}_4$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せ．その表し方はただ一通りであることを示せ．

問題 3. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1), \quad \boldsymbol{u}_2 = (-1, 3), \quad \boldsymbol{v}_1 = (0, 1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (2, -1) \in \mathbf{R}^2$ とおく．

(1) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ．また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ も $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}_j = a_{1,j}\boldsymbol{u}_1 + a_{2,j}\boldsymbol{u}_2$ となる $a_{i,j} \in \mathbf{R}$ $(i, j = 1, 2)$ を求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を縦ベクトルに書き換えたとき，2×2 行列の等式 $(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)A$ を確認せよ．

(4) A は正則であることを示せ．

(5) $\boldsymbol{u}_j = b_{1,j}\boldsymbol{v}_1 + b_{2,j}\boldsymbol{v}_2$ $(j = 1, 2)$ となる $b_{i,j} \in \mathbf{R}$ を求めよ．これらと A^{-1} の関係を考察せよ．

問題 4. V を $\mathbf{K}$ ベクトル空間とし，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ は 1 次独立であるとする．$i = 1, \ldots, k$ に対し，$\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$ であることを示せ．

補足．ベクトル空間 V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が与えられたとします（講義の定義 3.6 参照）．このとき定義 3.6 の条件 (2) より，すべての $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{v}_i = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ $(c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{K})$ の形に表せます．さらに条件 (1) より，この表し方はただ一通りです．なぜなら，もし $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c'_i\boldsymbol{v}_i$ とも表せたとすると，$\sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} c'_i\boldsymbol{v}_i$ より $\sum_{i=1}^{n}(c_i - c'_i)\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ で，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立なので $c_1 - c'_1 = \cdots = c_n - c'_n = 0$, つまり各 $i = 1, \ldots, n$ に対し $c_i = c'_i$ です．よってこの $\boldsymbol{x}$ は，n 個のスカラーの組 $(c_1, \ldots, c_n)$ で完全に特定されることになります．この組 $(c_1, \ldots, c_n)$ が，**基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する $\boldsymbol{x}$ の座標**です．ベクトル空間は $\mathbf{K}^n$ の性質を座標によらない形で抽象化したものでしたが，基底を一つ選べば，それに関する「座標」が一つ定まることになります．ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性は，各 $\boldsymbol{x} \in V$ の「座標」がただ一通りに定まることを保証する性質だということがわかります．

1 次独立性を理解するには，逆に 1 次従属なベクトルの組を具体的に見てみるのも一つの手です．例えば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{R}^n$ が 1 次従属であるとすると，$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ となる $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ で，どちらか一方が 0 でないものが取れます．例えば $a_1 \neq 0$ とすれば $\boldsymbol{v}_1 = -\dfrac{a_2}{a_1}\boldsymbol{v}_2$ です．これは $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が平行である，あるいは（始点を原点に統一すれば）同一直線に含まれることを意味します．逆に言うと，**$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{R}^n$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は同一直線には含まれません**．同じように考えると，**$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \mathbf{R}^n$ が 1 次独立なら，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は同一平面に含まれない**ことがわかります．一般に，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbf{R}^n$ が 1 次独立なら，これらは同一の「$k - 1$ 次元空間」に含まれません（想像しにくいのですが）．