2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）演習問題 4

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

問題 1. 次のベクトルの組は $\mathbf{R}^4$ の基底か？

(1) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (0,1,1,0), \quad \boldsymbol{v}_3 = (0,0,1,1), \quad \boldsymbol{v}_4 = (1,0,0,1)$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (0,1,1,0), \quad \boldsymbol{v}_3 = (0,0,1,1), \quad \boldsymbol{v}_4 = (1,0,-1,0)$

(3) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,-2,4,8), \quad \boldsymbol{v}_3 = (1,3,9,27), \quad \boldsymbol{v}_4 = (1,-4,16,64)$

問題 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $\operatorname{rank} A$ を求めよ．

(2) $V := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 \mid A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}\}$ とおく．V は $\mathbf{R}$ ベクトル空間であることを示せ．（教科書 p. 99, 例 4.1.5 (4) 参照）

(3) $\dim V$ を求めよ．

問題 3. $\boldsymbol{v}_1 = (2,1,-1,3), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,4,0,1), \quad \boldsymbol{v}_3 = (0,3,2,0), \quad \boldsymbol{v}_4 = (-1,0,-1,-2) \in \mathbf{R}^4$ とし，$W_1 := \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $W_2 := \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle \subset \mathbf{R}^4$ とおく．

(1) $\dim W_1, \dim W_2$ を求めよ．

(2) $\dim(W_1 \cap W_2)$ を求めよ．

(3) $\dim(W_1 + W_2)$ を求めよ．

問題 4. V が有限次元で $W \subset V$ が部分空間であるとき，W も有限次元であることを示せ．

補足. (1) 講義の命題 4.6 の証明をよく見ると，V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立で，n 個より多いベクトルの組が 1 次独立にならないとき（このとき $\dim V = n$ です），$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底になることがわかります．$V = \mathbf{R}^4$ の場合，$\dim \mathbf{R}^4 = 4$ であることはわかっていますから，1 次独立なベクトルの最大個数は 4 です．よって問題 1. (1)〜(3) の各組は，1 次独立であれば基底であり，1 次独立でなければ基底ではないことになります．$A = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3\ \boldsymbol{v}_4)$ という 4×4 行列を考えると，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立 $\iff \operatorname{rank} A = 4 \iff |A| \neq 0$ です．

(2) 講義の補題 4.1 を証明するときに使った

$$(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ \boldsymbol{b}_m)C \quad \cdots \quad (*)$$

（教科書 p. 108 も参照）という書き方は誤解を招くかもしれません．考えているベクトル空間が $V = \mathbf{K}^N$ で，各 $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j$ が縦ベクトルで書かれていれば，上の式は行列の間の等式として意味があります（演習問題 3 の問題 3 を参照）．しかし一般には，等式 $(*)$ は形式的なものと考えた方がよく，各 $\boldsymbol{b}_j$ をあたかもスカラーのように考えて，右辺を「$1 \times m$ 行列」と $m \times n$ 行列の積のようにみなして計算すると，V の n 個のベクトルの列が得られ，それらは左辺の $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ にそれぞれ一致する，という意味です．このような書き方は慣れると便利で，$x_1, \dots, x_n \in \mathbf{K}$ に対し，形式的に

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = (\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{x}, \quad \text{ただし} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表すことにすると，$\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j$ たちが $(*)$ のような関係にあるとき

$$(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ \boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{y}, \quad \text{ただし} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = C\boldsymbol{x} \quad \text{（これは通常の行列とベクトルの積）},$$

つまり $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = y_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{b}_m$ が成り立ちます（確かめてみてください）．つまり，通常の行列とベクトルの積と同じように，$(*)$ に右から $\boldsymbol{x}$ をかけてもよい，ということです．