2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）演習問題 5

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

問題 1. 次のベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots\}, \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots\}$ は V の基底であることを示せ．また $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots\}$ から $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots\}$ への基底の変換行列を求めよ．

(1) $V = \mathbf{R}^4$, $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 2, -3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (4, 1, -1, 2)$, $\boldsymbol{u}_3 = (2, 0, 2, 1)$, $\boldsymbol{u}_4 = (1, 2, 1, 0)$,
$\boldsymbol{v}_1 = (0, 1, 2, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 0, -1, 3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5, 0, 3, 1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (1, 2, -1, -3)$

(2) $V = \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u}_k = k\boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{e}_{n-k}$ $(1 \le k \le n)$. ただし $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbf{R}^n$ の標準基底.

問題 2. 講義の命題 6.5 で証明しなかった以下のことを証明せよ（内積の性質を用いよ）：
$(V, (\ ,\ ))$ を $\mathbf{R}$ 内積空間とし，各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とするとき

(1) $|\boldsymbol{x}| \ge 0$, また $|\boldsymbol{x}| = 0 \iff \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

(2) $\boldsymbol{x} \in V$ と $r \in \mathbf{R}$ に対し $|r\boldsymbol{x}| = |r||\boldsymbol{x}|$ ※右辺は r の絶対値 $|r| \in \mathbf{R}$ と $\boldsymbol{x}$ の長さ $|\boldsymbol{x}| \in \mathbf{R}$ の積

(3) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ （ヒント：Cauchy-Schwarz の不等式を使う）

また，(3) で等号が成り立つとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を求めよ．

問題 3. $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \sum_{k=1}^{n} k u_k v_k \in \mathbf{R}$$

と定義する．また $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底とする．

(1) 上の $(\ ,\ )$ は内積であることを示せ.

(2) $1 \le i, j \le n$ に対し，$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ を計算せよ．特に，$\boldsymbol{e}_k$ の長さ $|\boldsymbol{e}_k|$ を求めよ．

問題 4. 実数を係数とする x の多項式全体のなすベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ を V とおく（演習問題 2 参照）.

(1) $f(x), g(x) \in V$ に対し

$$(f(x), g(x)) := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

とおく．$(\ ,\ )$ は V 上の内積であることを示せ．

(2) $f_i(x) := x^i$ $(i \ge 0)$ とおく．$(f_i(x), f_j(x))$ を計算せよ．特に，$f_i(x)$ の長さ $|f_i(x)|$ を求めよ．

問題 5. 実数を要素とする $n \times n$ 正方行列全体の集合を $V = M_n(\mathbf{R})$ とおく．

(1) V は行列の和と実数倍に関して実ベクトル空間となることを示せ．$\dim V$ を求めよ．（教科書 p. 97 参照）

(2) $A, B \in V$ に対し

$$(A, B) := \mathrm{tr}({}^t A \cdot B)$$

とおく．ただし，一般に $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in V$ に対し，$\mathrm{tr}(X) := \sum_{k=1}^{n} x_{kk}$ は X の跡 (trace), また ${}^t X := (x_{ji})_{1 \le i,j \le n}$ は X の転置である．$(\ ,\ )$ は V 上の内積であることを示せ.

(3) (i, j) 成分が 1, 他は 0 である行列を $E_{ij} \in V$ とおく．(E_{ij}, E_{kl}) を計算せよ．

補足．ベクトル空間は，$\mathbf{K}^n$ の性質のうち，和とスカラー倍だけを取り出し抽象化したものでした．Euclid 内積は $\mathbf{R}^n$ が標準基底を持つことを使って定義されるもので，一般のベクトル空間上で定まるものではありません．そこで，Euclid 内積の定義式でなく，それが持つ性質だけに注目して抽象化したのが一般の内積です．その結果，問題 4, 5 のようなベクトル空間にも（いろいろな）内積を定義でき，ベクトルの「長さ」や「角度」を定められます．これにより，これらのベクトル空間内で幾何学を行えるようになります．また，抽象化したことにより，もともとの $\mathbf{R}^n$ にもさまざまな内積が考えられます．例えば問題 3 の内積を持つ $\mathbf{R}^n$ は，(2) を計算してみるとわかりますが，方向によって長さが偏っているような，Euclid 空間に比べて「歪みのある」ベクトル空間になっています．
長さの記号は，教科書では $\|\boldsymbol{v}\|$ ですが，この講義では $|\boldsymbol{v}|$ にしています．どちらでも差し支えありません．