2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）演習問題 6

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．
以下，$\mathbf{R}^n$ 上には Euclid 内積を考えるものとする．

問題 1. 次のベクトルの組が $V = \mathbf{R}^n$ の基底であることを示し，この組に Gram-Schmidt の直交化法を（講義でやった順序で）適用して得られる正規直交基底を求めよ．

(1) $V = \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{v}_1 = (2, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 3)$

(2) $V = \mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 4)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0, 3, 1)$

(3) $V = \mathbf{R}^4$, $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 2, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2, 3, -1, 2)$, $\boldsymbol{v}_4 = (-1, 2, 1, 0)$

(4) $V = \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_{k-1}$ $(2 \le k \le n)$,　ただし $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbf{R}^n$ の標準基底.（ヒント：答を $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ とすると，$1 \le k \le n$ に対し $\langle \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ である）

問題 2. 次の部分空間 $W \subset V$ の直交補空間 $W^\perp$ と，その次元を求めよ．

(1) $V = \mathbf{R}^2$, $W = \langle (1, 2) \rangle$

(2) $V = \mathbf{R}^3$, $W = \langle (1, 1, 1) \rangle$

(3) $V = \mathbf{R}^3$, $W = \langle (1, 0, 2), (0, -1, 3) \rangle$

(4) $V = \mathbf{R}^n$, $W = \langle \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_n \rangle$

(5) V は $\mathbf{R}$ 内積空間，$W = V$

(6) V は $\mathbf{R}$ 内積空間，$W = \{\mathbf{0}\}$

問題 3. $V = \mathbf{R}[x]_{\le n}$ を，実数を係数とする x の n 次以下の多項式全体からなるベクトル空間とする．

(1) $\boldsymbol{v}_1 := 1, \boldsymbol{v}_2 := x, \dots, \boldsymbol{v}_{n+1} := x^n$ は V の基底であることを示せ．

(2) 演習問題 5.4 の内積について，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{n+1}$ に Gram-Schmidt の直交化法を用いて得られる V の正規直交基底を求めよ．

補足. Gram-Schmidt の直交化法の証明には，今まで学んだことを満遍なく使うので，よい復習になるように思います．ぜひ自分で考えながら見直してみてください．
Gram-Schmidt の直交化法は，もとのベクトルの順序により異なる正規直交基底を与えます．例えば $\mathbf{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1), \boldsymbol{v}_2 = (-1, 0)$ からは $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ が得られますが，$\boldsymbol{v}'_1 = (-1, 0), \boldsymbol{v}'_2 = (1, 1)$ からは $(-1, 0), (0, 1)$ が得られます．「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots$ に対して Gram-Schmidt の正規直交化法を用いて…」と問われたら，講義でやったのと同じ順序で，$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}'_1/|\boldsymbol{u}'_1|$（ただし $\boldsymbol{u}'_1 = \boldsymbol{v}_1$ とする），$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}'_2/|\boldsymbol{u}'_2|$（ただし $\boldsymbol{u}'_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$ とする），... を答えてください．一般的に，Gram-Schmidt の直交化法を具体的に実行すると，大変な計算になることが多いようです．
ベクトル空間は，$\mathbf{K}^n$ の性質のうち和とスカラー倍だけを取り出し抽象化したもので，$\mathbf{K}^n$ のように標準的な座標軸があるわけでなく，座標の代わりである基底の取り方は幾通りもある，ということをしつこく繰り返し述べてきました．さらに付加的な構造として内積を与えることにより，Gram-Schmidt の直交化法を用いて正規直交基底（直交座標系）を取ることができます．ここまでくると，一般のベクトル空間が $\mathbf{K}^n$ とかなり近いものに思えてきます．逆に言うと，ここまでしないと一般のベクトル空間は $\mathbf{K}^n$ と同じものには見えてこないわけで，その意味で我々になじみ深い n 項ベクトルの空間 $\mathbf{K}^n$ は極めて特殊なものと言えるかもしれません．