2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）演習問題 7

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．
以下，$\mathbf{R}^n$ 上には Euclid 内積を考えるものとする．

問題 1. A を n 次直交行列とする．

(1) A の行列式 $|A|$ を求め，A は正則であることを示せ（ヒント：直交行列の定義 ${}^tAA = E_n$ と教科書の定理 3.4, 3.13 を使う）．また $A^{-1} = {}^tA$ を示せ．

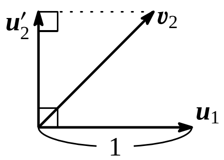
(2) ${}^tA$ も直交行列であることを示せ．

(3) A の第 k 行ベクトルを $\vec{a}'_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ とするとき，$\vec{a}'_1, \ldots, \vec{a}'_n$ は $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底であることを示せ．

(4) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ を $\mathbf{0}$ でないベクトルとするとき，$A\boldsymbol{u}$ と $A\boldsymbol{v}$ のなす角は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角に等しいことを示せ．

(5) B も n 次直交行列であるとき，AB も n 次直交行列であることを示せ．

問題 2. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{R}^n$ は 1 次独立で $|\boldsymbol{u}_1| = 1, |\boldsymbol{v}_2| \neq 0$ をみたすとする．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2$ を含む平面内のベクトル $\boldsymbol{u}'_2$ を図のように取る．$\boldsymbol{u}'_2$ を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2$ と $k := (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2)$ と $l := |\boldsymbol{v}_2|$ を用いて表せ．適当な $a > 0$ を用いると，$\boldsymbol{u}_2 := a\boldsymbol{u}'_2$ が Gram-Schmidt の直交化法の $\boldsymbol{u}_2$ と等しくなることを示せ．



補足．直交行列の定義式 ${}^tAA = E_n$ は，Euclid 内積に関する等式 $(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ と同値でした．後者の式を指して「直交行列は Euclid 内積を保つ」という言い方をすることもあります．また対称行列とは $(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v})$ がいつも成立する行列でした．他にも特別な名前のついた行列はいろいろあり，それらはしばしば内積との関係により定義されます．

講義では $\mathbf{R}$ 上の内積空間だけを扱いましたが，$\mathbf{C}$ ベクトル空間の場合もほぼ同様に話が進みます．手本となる $\mathbf{C}^n$ の**エルミート内積** (Hermitian metric) は，$\boldsymbol{u} = {}^t(u_1, \ldots, u_n), \boldsymbol{v} = {}^t(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{C}^n$ に対し

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k} \in \mathbf{C}, \quad \text{ただし } z = x + \sqrt{-1}\,y \ \ (x, y \in \mathbf{R}) \text{ に対し } \bar{z} := x - \sqrt{-1}\,y \quad \text{（複素共役）}$$

と定義され，次の性質をみたします：

(1) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \in \mathbf{R}$ かつ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$, また $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

(2) $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \overline{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}$

(3) $(k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + l(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

(2), (3) より $(\boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v} + l\boldsymbol{w}) = \bar{k}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \bar{l}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ であることには注意が必要です．
一般に，$\mathbf{C}$ ベクトル空間 V の各ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，(1)〜(3) をみたす $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{C}$ が定まっているとき，V を内積空間とよびます．$\mathbf{C}$ 上の内積空間でも直交系は 1 次独立であり，Gram-Schmidt の直交化法はそのまま使えます．$\mathbf{R}$ 内積空間の場合に直交行列が現れたところは，代わりに $AA^* = E_n$ をみたす**ユニタリ行列** (unitary matrix) を使い，対称行列の代わりは $A^* = A$ をみたす**エルミート行列**を考えると，$\mathbf{R}$ 内積空間のときと同様のことが成立します．ただし $A^* := {}^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$（**随伴行列**）です．
紛らわしいことに，$\mathbf{C}^n$ 上のエルミート内積を $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \sum_k \overline{u_k} v_k$ と定義する流儀もあり，この流儀では内積がみたす性質として，(3) の代わりに

(3)' $(\boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v} + l\boldsymbol{w}) = k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + l(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$

を要請します．このときは Gram-Schmidt の直交化法も少し修正を要します．どちらの流儀に基づいているのか，その都度確認しなければなりません．