2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）演習問題 8

担当：境 圭一

問題 1. 次の写像は線形であることを示せ．それぞれの核 (kernel) と像 (image) を求めよ．これらは全射か？また単射か？

(1) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y$ (2) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\quad g(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x \end{pmatrix}$ (3) $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\quad h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 4y \end{pmatrix}$

問題 2. 次の写像は線形ではない．その理由を述べよ．

(1) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2y$ (2) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\quad g(x) = \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ 3x \end{pmatrix}$ (3) $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\quad h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x + y) \\ \sin(x + 4y) \end{pmatrix}$

問題 3.

(1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を線形写像とし，$f(1) = a$ とおく．各 $x \in \mathbf{R}$ を $x = x \cdot 1$ と見ることにより，$f(x) = ax$ を示せ．

(2) $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を線形写像とし，$g(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{v}_1, g(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{R}^2$（縦ベクトル）とおく．また 2×2 行列 A を $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ で定める．各 $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対し，$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2$ と見ることにより，$g(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ であることを示せ．

(3) $h : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ を線形写像とする．$1 \leq k \leq m$ に対し $\boldsymbol{v}_k := h(\boldsymbol{e}_k) \in \mathbf{R}^n$ とおき，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \end{pmatrix}$ とおくとき，全ての $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$ に対し $h(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ となることを示せ．

問題 4. 線形写像 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ が，ある 2×2 行列 A を用いて，各 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^2$（縦ベクトル）に対し $f(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ と定義されているとする．

(1) $\operatorname{rank} A = 2$ であるとき，f は単射であることを示せ．（ヒント：f が単射 $\iff$ $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$）

(2) $\operatorname{rank} A < 2$ であるとき，f は単射でないことを示せ．（ヒント：教科書の命題 2.9）

問題 5. 実数を係数とする x の多項式全体のなすベクトル空間を V とする．写像 $I : V \to \mathbf{R}$ を $I(f) := \int_0^1 f(x)\, dx$ で定義する．I は線形写像であることを示せ．

補足．**(1) 写像について**．集合 A, B の間の**写像** (map) $f : A \to B$ とは，各 $a \in A$ に対し $f(a) \in B$ が**ちょうど一つ**定まる対応をいいます．典型的な例は $f(x) = x^2 + 1$ や $g(x) = \sin x$ といった**関数** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ で，これらは各 $x \in \mathbf{R}$ に $f(x) \in \mathbf{R}$ がちょうど一つ対応しています．一方，$A = \{$ 信大生 $\}$, $B = \{$ 講義科目 $\}$ という集合を考え，$x \in A$ に対し $f(x) := (x$が好きな科目$)$ という対応を考えようとすると，多くの $x \in A$ に対し $f(x)$ はちょうど一つには定まらないと思うので，f は写像ではないと思います．なるべくたくさん定まってほしいものです．

(2) ベクトル空間 V, W について，写像 $f : V \to W$ が線形であるとは，各 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, $a, b \in \mathbf{K}$ に対し $f(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{u}) + bf(\boldsymbol{v})$ が成立することです．これは f が和やスカラー倍の構造を保つことである，と言えます．そのような写像は実はあまり多くなく，問題 2 が示すように，$V = \mathbf{R}^m, W = \mathbf{R}^n$ の場合は，すべての線形写像 $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ は，何らかの $n \times m$ 行列 A により $f(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ と表されます．実は一般のベクトル空間 V, W の場合も本質的にこの形に限られます．この意味で，線形写像について考えることは，行列について考えることと同等です．

(3) 単射性，全射性の判定．線形写像 $f : V \to W$ が単射であることは，$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ と同値です．例えば問題 1 (1) の f について，$f(2, -1) = 0$ ですから $(2, -1) \in \operatorname{Ker} f$ です．よって $\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{0}\}$ ですから，f は単射ではありません．また問題 1 (2) の g について，$g(x) = \mathbf{0}$, つまり $x \in \operatorname{Ker} g$ と仮定すると $2x = 3x = 0$, よって $x = 0$ です．従って $\operatorname{Ker} g = \{0\}$ ですから，g は単射です．

また，$f : V \to W$ が全射であるとは，各 $\boldsymbol{w} \in W$ に対し，$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ が見つかる，ということです．例えば問題 1 (1) の f について，各 $a \in \mathbf{R}$ に対し，例えば $f(a, 0) = a + 2 \cdot 0 = a$ ですから，f は全射です．$(a, 0)$ を選んだことに理由はなく，$f(x, y) = a$ をみたす (x, y) は他にも $(0, a/2)$ や $(3a, -a)$ など，いくらでもあります．一方，問題 1 (2) の g について，例えば $g(x) = (0, 1)$ をみたす x は存在しませんから，g は全射ではありません．$(0, 1)$ を選んだことに理由はなく，$3a \neq 2b$ であるような $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ に対しては，$g(x) = (a, b)$ をみたす x が存在しないことがわかります．