2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）演習問題 9

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

問題 1. V, W をそれぞれ n 次元，m 次元のベクトル空間とし，$\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n, \{\boldsymbol{w}_i\}_{i=1}^m$ をそれぞれ V, W の基底とする．

(1) $n \le m$ とする．線形写像 $f : V \to W$ を，$f(\boldsymbol{v}_i) := \boldsymbol{w}_i$ $(1 \le i \le n)$ となるように定める．つまり，各 $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{v}_i \in V$ に対しては $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n x_i f(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{w}_i$. このとき，$f$ は単射であることを示せ．

(2) $n \ge m$ とする．線形写像 $g : V \to W$ を，$g(\boldsymbol{v}_i) := \boldsymbol{w}_i$ $(1 \le i \le m)$, もし $n > m$ なら $g(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_m$ $(n+1 \le j \le m)$ で定める．g は全射であることを示せ．

(3) $n = m$ とする．線形写像 $h : V \to W$ を，$h(\boldsymbol{v}_i) := \boldsymbol{w}_i$ $(1 \le i \le n)$ で定める．h は全単射であることを示せ．

問題 2. 次の線形写像 f_i について，その核 (kernel) と像 (image) の基底を一組ずつ求めよ．また f_i について次元定理が成り立っていることを確認せよ．

(1) $f_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\quad f_1(x, y) := x - 4y$

(2) $f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $\quad f_2(x, y) := (x + 2y,\ 3x + 4y,\ 5x + 6y)$

(3) $f_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $\quad f_3(x, y) := (x + 2y,\ 2x + 4y,\ 3x + 6y)$

(4) $f_4 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $\quad f_4(x, y, z) := (x - 2z,\ 2y + 3z)$

補足．以下，$f : V \to W$ は線形写像です．

(1) f が線形であるとは，f が和とスカラー倍の構造を保つことである，と言えます．もし f が全単射でもあれば，V のベクトルと W のベクトルが（和とスカラー倍の構造も込みで）完全に一対一に対応するということですから，V と W はベクトル空間として「同じもの」とみなせます．このときに f のことを同型写像といい，V と W は同型なベクトル空間である，と言います．V と W は異なるものですが，ベクトル空間としての構造だけを見れば同じものである，ということです．

講義でやった系 7.14 (3) によれば，同型なベクトル空間は同じ次元を持たなければなりません．一方，問題 1 (3) によれば，同じ次元のベクトル空間の間には同型写像を構成することができます．よって，**二つのベクトル空間が同型であることは，次元が等しいことと同値です．**

例えば，実数を係数とする n 次以下の x の多項式全体のなすベクトル空間 $V = \mathbf{R}[x]_{\le n}$ を考えると，V の基底として，x の多項式 $1, x, \ldots, x^n$ を取ることができます（すべての n 次以下の多項式は，これらの線形結合で表せます）．よって $\dim V = n + 1$ です．一方 $\dim \mathbf{R}^{n+1} = n + 1$ でしたから，V は $\mathbf{R}^{n+1}$ と同型です．同型写像（の一つ）として，$f : V \to \mathbf{R}^{n+1}$, $f(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) := a_0\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_{n+1}$ を取ることができます．V と $\mathbf{R}^{n+1}$ はもちろん全くの別物ですが，ベクトル空間の構造だけを見れば同じである，というわけです．

(2) f が単射であるとは，$\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $f(\boldsymbol{v}) \ne \mathbf{0}$ である，ということです．気持ちとしては，f は V の $\mathbf{0}$ でない情報を損なうことなく（$\mathbf{0}$ にすることなく）W に伝える，という感じです．このとき W には V の情報をすべて受け入れる容量が必要で，講義でやった系 7.14 (1) や問題 1 (1) はこのことを反映しているような感じです．

(3) f が全射であるとは，各 $\boldsymbol{w} \in W$ に対し，$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ が少なくとも一つ見つかる，ということでした．気持ちとしては，W に含まれる情報はすべて f を通じて V から来る，という感じです．これは V のほうが情報量が多くないと実現しない状況で，講義でやった系 7.14 (2) や問題 1 (2) はこのことを反映しているような感じです．

(4) 講義の系 7.14 は，f が与えられているとき，(i) f が単射 $\Longrightarrow \dim V \le \dim W$, (ii) f が全射 $\Longrightarrow \dim V \ge \dim W$, という主張ですが，これらの逆は成り立ちません．例えば $g : V \to W$ を，各 $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $g(\boldsymbol{v}) := \mathbf{0}$ で定めると（**ゼロ写像** (zero map) とよぶ），$\dim V \ge 1$ のとき，g は (i), (ii) の逆が成り立たないことを示す例になっています．