2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）演習問題 10

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

問題 1. 次の線形写像 f, g, h について，与えられた基底に関する表現行列を求めよ． f, g, h は単射か？また全射か？

(1) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\quad f(x, y) = (x - 3y,\ x + 3y)$, $\quad \mathbf{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1), \boldsymbol{u}_2 = (-2, 1)$

(2) $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\quad g(x, y, z) := (2x + 3y - z,\ x + y,\ y - z)$, $\quad \mathbf{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{u}_1 = (0, 1, 1), \boldsymbol{u}_2 = (1, 0, 1), \boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 0)$

(3) $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $\quad h(x, y) := (x + 2y,\ 2x + 3y,\ -x)$, $\quad \mathbf{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1), \boldsymbol{u}_2 = (-1, 1)$, $\quad \mathbf{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 1), \boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 0)$

問題 2（教科書 p. 143, 命題 5.7 (2) 参照）．$\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^n, \{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ がともに V の基底であるとする．恒等写像 $\mathrm{id} : V \to V$, $\mathrm{id}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}$ について，$\{\boldsymbol{u}_i\}_i$ を id の定義域 V の基底，$\{\boldsymbol{v}_i\}_i$ を値域 V の基底とみなすと（教科書の記号を使えば，$\mathrm{id} : V\{\boldsymbol{u}_i\}_i \to V\{\boldsymbol{v}_i\}_i$ とみなすと），これらに関する id の表現行列は，$\{\boldsymbol{u}_i\}_i$ から $\{\boldsymbol{v}_i\}_i$ への基底の変換行列であることを示せ．

問題 3（教科書 p. 148, §5.3 参照）．$(V, (\ ,\ ))$ を実内積空間とし，$\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ を V の正規直交基底とする．

(1) 各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し，$\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{v}_i$ が成り立つことを示せ．（ヒント：$\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{v}_i$ とおき，両辺と $\boldsymbol{v}_j$ の内積を取ると a_j が求まる）

線形写像 $f : V \to V$ は，各 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つとき，**直交変換**であるという．

(2) $f : V \to V$ を直交変換とするとき，各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $|f(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ であることを示せ．

(3) $f : V \to V$ を直交変換とするとき，$\{\boldsymbol{v}\}_{i=1}^n$ に関する f の表現行列は直交行列であることを示せ．

補足．演習問題 9 の補足で述べたように，$\dim V = n, \dim W = m$ とすると，V は $\mathbf{R}^n$ と同型，W は $\mathbf{R}^m$ と同型です．V, W の基底 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n, \{\boldsymbol{w}_i\}_{i=1}^m$ を選ぶと，同型写像 $F : V \to \mathbf{R}^n, G : W \to \mathbf{R}^m$ を，それぞれ次のように構成できます：

$$F\Bigl(\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{v}_i\Bigr) := \sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad G\Bigl(\sum_{i=1}^n b_i\boldsymbol{w}_i\Bigr) := \sum_{i=1}^m b_i\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

線形写像 $f : V \to W$ を基底 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n, \{\boldsymbol{w}_i\}_{i=1}^m$ に関して行列で表示するとは，合成写像 $G \circ f \circ F^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を具体的に求めることに他なりません．実際，これらの基底に関して f が $n \times m$ 行列 A で表現されるとは $(f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m)A$ ということでした．このことと，F の定義式より $F^{-1}\Bigl(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{e}_i\Bigr) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{v}_i$ であることから

$$(f \circ F^{-1})\Bigl(\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{e}_i\Bigr) = \sum_{i=1}^n a_i f(\boldsymbol{v}_i) = (f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n))\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m)A\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m)\boldsymbol{b},$$

ただし $\boldsymbol{a} := {}^t(a_1, \dots, a_n), \boldsymbol{b} := {}^t(b_1, \dots, b_m) = A\boldsymbol{a}$ です．最右辺を $\displaystyle\sum_{i=1}^m b_i\boldsymbol{w}_i$ と書き直せば

$$(G \circ f \circ F^{-1})\Bigl(\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{e}_i\Bigr) = G\Bigl(\sum_{i=1}^m b_i\boldsymbol{w}_i\Bigr) = \sum_{i=1}^m b_i\boldsymbol{e}_i, \quad \text{つまり} \quad (G \circ f \circ F^{-1})(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{a}$$

です．V と W を（基底を使って）それらと同型な $\mathbf{R}^n$ と $\mathbf{R}^m$ と**同一視**してしまうと，線形写像 f は基底に関する表現行列 A をかける操作に見える，というわけです．次の図式が参考になるかもしれません：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "G", "\cong"'] \\ \mathbf{R}^n \arrow[u, "F^{-1}", "\cong"'] \arrow[r, "A\text{をかける}"] & \mathbf{R}^m \end{tikzcd}$$

※"$\cong$"は同型であることを表す

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_linear/16_linear.html