2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）演習問題 11

担当：境 圭一

問題 1. 次の行列 A_k の固有値と，それらに属する固有空間の基底を求めよ．また固有値の和と積を計算し，$\operatorname{tr} A$, $|A|$ と比較せよ．ただし $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ に対し $\operatorname{tr} A := a_{11} + \cdots + a_{nn}$（これを A の跡 (trace) という），また $i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$

(6) $A_6 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3i & -1+2i & -1+i \\ i & 1+2i & 1-i \\ -i & 1-2i & 1+i \end{pmatrix}$ (7) $A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ※一部は「線形代数演習」（斎藤正彦著，東京大学出版会）から借用しました

問題 2. A を $n \times n$ 行列とする．

(1) ϕ_A は t の n 次多項式で，t^n の係数は 1 であることを示せ．（ヒント：行列式の定義（教科書 62 ページ）を使う．$tE_n - A = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, つまり $i \neq j$ のとき $b_{ij} = -a_{ij}$, $i = j$ のとき $b_{ii} = t - a_{ii}$ とおくとき，$b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$ には t は高々 n 回しか現れず，t^n が現れるような $\sigma \in S_n$ は恒等置換しかないことを示せばよい）

(2) $\phi_A(t)$ の t^{n-1} の係数は $-\operatorname{tr} A$ であることを示せ．（ヒント : (1) と同様．$b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$ に t^{n-1} が現れるような $\sigma \in S_n$ も恒等置換しかない）

(3) A の固有値を重複も込めて $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とするとき，$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A$ であることを示せ．（ヒント：$\phi_A(t)$ に対する解と係数の関係）

(4) $\phi_A(t)$ の定数項は $(-1)^n|A|$ であることを示せ．（ヒント：多項式 ϕ_A の定数項は $\phi_A(0)$ である）

問題 3. 対角成分が順に $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ であるような $n \times n$ 対角行列 (diagonal matrix) を $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ と表す．

(1) $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ のとき，自然数 k に対し，$A^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ であることを示せ．

(2) 一般に，$n \times n$ 行列 B の**指数関数** $\exp(B) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$ は収束することが知られている．$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ のとき，$\exp(A) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$ であることを示せ．

(3) 対角行列とは限らない $n \times n$ 行列 B に対し，ある $n \times n$ 正則行列 P が存在して $P^{-1}BP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ となるとするとき，$\exp(B) = P\operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})P^{-1}$ を示せ．

補足．λ はラムダ，ϕ はファイまたはフィーと発音します．これらはギリシャ文字です．空集合（要素を含まない集合）を表す記号 $\emptyset$ はゼロに斜線を重ねたもので，ϕ とは違いますから注意してください．

$\lambda \in \mathbf{C}$ が $n \times n$ 行列 A の固有値である，つまり $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ をみたす $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するとき，λ は A の固有方程式 $\phi_A(t) = |\lambda E_n - A| = 0$ の解でなければならない，ということは講義で述べました．逆に λ が $\phi_A(t) = 0$ の解であれば $|\lambda E_n - A| = 0$, したがって $\operatorname{rank}(\lambda E_n - A) < n$ ですから，連立一次方程式 $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は非自明な解 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ を持ちます．よって λ は A の固有値で，非自明な解 $\boldsymbol{x}$ は λ に属する固有ベクトルになります．以上のことから，A の固有値と $\phi_A(t) = 0$ の解は完全に一致することがわかります．ϕ_A は n 次多項式なので，複素数の範囲では $\phi_A(t) = 0$ の解，つまり A の固有値は（重複も込めて）n 個あります．スカラーを複素数にしたのはこのことが理由です．

このあとの講義でやりますが，例えば A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に重複がないとき，λ_i に属する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i \neq \mathbf{0}$ を取り $P = (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_n)$ とおくとき，$AP = (A\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ A\boldsymbol{u}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \lambda_n\boldsymbol{u}_n) = P\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ となります（記号は問題 3 を参照）．実は P は正則で，$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ です．つまり A は対角化されます．問題 3 は対角化の応用例で，$\exp(B)$ の定義は複雑だが，いったん対角化しておくと容易に計算できる，という内容です．