

問題 1. 演習問題 11-1 の A_1, \dots, A_7 について, 対角化可能かどうか判定し, 可能な場合は $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を一つ求めよ.

問題 2. 縦ベクトル $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{C}^n$ を横に並べてできる複素 $n \times n$ 行列を $P = (\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_n)$ とおく.

(1) A を $n \times n$ 行列とするとき

$$AP = (\mathbf{Ax}_1 \ \cdots \ \mathbf{Ax}_n)$$

であることを確かめよ.

(2) 対角成分が順に $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ であるような $n \times n$ 対角行列 (diagonal matrix) を $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と表すとき

$$P\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{x}_n)$$

であることを確かめよ.

問題 3.

(1) k を定数とする. 微分方程式 $x'(t) = k \cdot x(t)$ の解は $x(t) = ce^{kt}$ (ただし c は定数) の形になることを示せ.

(2) $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ とおく. $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2×2 正則行列を一つ求めよ.

(3) 連立微分方程式

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) + 2x_2(t) \\ -3x_1(t) + 4x_2(t) \end{pmatrix}$$

を, $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} := P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ とおいて解け.

補足. 以下, A は $n \times n$ 行列であるとしします.

A が対角化できる場合, $P^{-1}AP = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ とすると (記号については問題 2 を参照), μ_1, \dots, μ_n は必ず A の固有値です. なぜなら, 講義でやった命題 9.6 (1) より $\phi_A(t) = \phi_{P^{-1}AP}(t)$ ですが, 明らかに

$$\phi_{P^{-1}AP}(t) = |\text{diag}(t - \mu_1, \dots, t - \mu_n)| = (t - \mu_1) \cdots (t - \mu_n)$$

ですから, μ_1, \dots, μ_n は $\phi_A(t) = 0$ の解, つまり A の固有値です.

また A が対角化できる場合, 対角成分の固有値の順序は自由に調節できます. 固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ の順に並べたいとしたら, 対応する固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ を同じ順に並べて行列 $P = (\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_n)$ を作れば, $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ になります.

講義の定理 9.9 で, 固有値 λ_i ($i = 1, \dots, m$) がそれぞれ n_i 個並ぶような対角行列を考えましたが, この値 n_i は実は固有値 λ_i の重複度に一致します. つまり $\phi_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_m)^{n_m}$ です. このことは次週お話しします.

対角化できることの応用として, 演習問題 11 では行列の指数関数のことを扱いましたが, 今回の問題 3 は連立線形微分方程式への応用です. 簡単のため 2 つの方程式の場合を考えましたが, n 個の場合への拡張も容易でしょう.