2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）演習問題 13

担当：境 圭一

問題 1. 次の対称行列 A_k の固有値を求めよ．また ${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ．（ヒント：一般の行列と同様の手続きで各固有空間の基底を求め，これを Gram-Schmidt の方法で正規直交化すればよい．対称行列の場合，異なる固有値に属する固有空間は直交するから，$\mathbf{R}^n$ の正規直交基底を得たことになる）

(1) $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $A_3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 2.

(1) V, W を $\mathbf{K}$ ベクトル空間とする．$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ である．
 (i) 写像 $f : V \to W$ が線形であることの定義を述べよ．
 (ii) 線形写像 $f : V \to W$ について，$\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$ の定義を述べよ．これらはそれぞれ V, W の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) 次の線形写像 f_k について，$\operatorname{Ker} f_k, \operatorname{Im} f_k$ の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ．
 (i) $f_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$, $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := 3x - y$ (ii) $f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x + y \\ 4x + 2y \end{pmatrix}$
 (iii) $f_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$ (iv) $f_4 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 4y + 6z \end{pmatrix}$

(3) A を $n \times n$ 行列とする．$\lambda \in \mathbf{C}$ が A の固有値であることの定義を述べよ．λ が A の固有値であるとき，λ に属する固有ベクトル，ならびに固有空間 $V(\lambda)$ の定義を述べよ．$V(\lambda)$ は $\mathbf{C}^n$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

問題 3. A を $n \times n$ 行列とする．$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を A の固有値で互いに異なる（つまり，$i \neq j$ のとき $\lambda_i \neq \lambda_j$ である）ものとし，λ_i の重複度が n_i, つまり

$$\phi_A(t) = |tE_n - A| = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_m)^{n_m}$$

であるとする．このとき $\dim V(\lambda_i) \leq n_i$ であることを示せ．また，「A が対角化可能 $\iff$ 各 $i = 1, \dots, m$ に対し $\dim V(\lambda_i) = n_i$」を示せ．（流れは以下の通り：教科書の定理 6.11 を示し，これを使って教科書の定理 6.5 を示す．以上の準備のもと，教科書の定理 6.6 の (3) と (4) が同値であることを示す．定理 6.11 の証明は，対称行列が直交行列で対角化できることの証明とよく似ている）

補足. 問題 2 は今までの復習です．問題 1 も，以前やった対角化可能性の判定・実際に対角化する方法の復習になると思います．十分に準備して期末試験に臨んでください．
講義では対称行列が直交行列で対角化されることを述べましたが，対称行列の複素数版である**エルミート行列**や，これらを一般化した**正規行列**が，直交行列の複素数版である**ユニタリ行列**で対角化されることが知られています．また対角化できない行列については，**上三角化**や**ジョルダン標準形**といった変形方法が知られています．一部は教科書に書いてありますし，より進んだ参考書には上記のことがすべて書かれています．
また時間の関係で，教科書の二次形式の部分は割愛しました．幾何学と線形代数が結びついた面白い内容ですので，興味があればぜひ自習してみてください．

大学の数学は高校数学とはずいぶん雰囲気が変わり，非常に抽象的でわかりづらく感じることが多いのではないかと思います．また物理や化学を学ぶ上で数学を使う機会はそれほど多くないかもしれず，モチベーションを上げるのはなかなか難しかったかもしれません．しかし，目先のことにとらわれずにしっかり数学を学んだ人は，腰を据えて物事をきちんと筋道立てて考える素養が少し備わったのではないかと思います．数学の内容を忘れてしまったとしても，そのような力は必ず今後に生かされるはずです．自信をもって自分の専門分野に進んでください．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_linear/16_linear.html