2016 年度 線形代数学 II（火曜 2 限，物理学コース・化学コース）

担当：境 圭一

1. 講義の内容，成績など.

(1) **必修科目です**．ベクトル空間・線形写像などの初歩的な部分を抽象的に扱います．

(2) 教科書は「基礎理学 線形代数学」（数学教科書編集委員会編，学術図書出版社）です．生協で購入できます．第 4 章〜第 7 章の内容を扱います．

(3) **成績は，中間試験と期末試験，ならびにレポートの状況により判定します**．中間・期末試験とも 50 点満点，計 100 点満点です．このほかに数回のレポートを課します（20 点程度相当の予定）．これらの合計が 60〜69 点なら「可 (C)」，70〜79 点なら「良 (B)」，などとします．中間試験または期末試験を受験しなかった場合は「不可」です．追試の類は行いません．

(4) 中間試験は 11/22（火）2 限，期末試験は 1/31（火）2 限の予定です．変更がある場合は追って掲示します．

(5) 出席状況は，成績評価には用いません．

(6) この講義に関する連絡事項は，A 棟 3 階・5 階の掲示板に掲示するほか，以下の URL でも入手できます．
`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_linear/16_linear.html`

(7) この講義に演習はついていませんが，演習問題などの情報は上記 URL に随時掲載します．また，学習支援として「数学茶屋 峠」が 10/5 以降の水曜 16:20〜18:20 に理学部第 5 講義室で開催されます．

(8) 講義中であっても遠慮なく質問してください．講義外でも随時受け付けます．研究室（理学部 A 棟 403）にお越しください．あらかじめ `ksakai@math.shinshu-u.ac.jp` 宛に連絡をもらえれば確実です．

2. よく使う記号など．ここに書いたもの以外にもあります．わからないものがあれば，その都度質問してください．

(1) 「定義」「命題」など画数の多い言葉は，横文字（の省略形）で書くことが多々あります．教員によって異なる省略形を使うこともあるので厄介です．

- 「定義」: Definition, Def など．「このように約束する」という内容です．
- 「定理」: Theorem, Thm, Th など．（明らかでない）ある事実が成立する，と主張する内容です．
- 「命題」: Proposition, Prop など．定理と同類ですが，定理よりは少し軽い感じです．
- 「補題」: Lemma, Lem など．定理や命題と同類ですが，より重要な定理や命題などに向けた補助的な内容です．中には，結果的に定理より重要になるような，汎用性が極めて高いものもあります．
- 「系」: Corollary, Cor など．前の定理や命題を使えばすぐに証明できる，という内容です．
- 「証明」: Proof, Pf など．定理などが成り立つ理由を厳密に示します．
- 「例」: Example, Ex など．抽象的な理論に対する具体例です．
- 「注意」: Remark, Rem, Rmk など．補足したり，間違えやすい点について注意を促す内容です．

(2) A $\overset{\text{def}}{\iff}$ B と書いたら，「A とは，B であることと定義する」という意味です．A, B は命題（文章）です．例えば

$$n \times n \text{ 行列 } X \text{ が正則} \overset{\text{def}}{\iff} |X| \neq 0$$

は，「$n \times n$ 行列 X が正則であるとは，X の行列式 $|X|$ が 0 でないことと定義する」という意味です．

(3) $P := Q$ と書いたら，「Q のことを P と書く」という意味です．記号を定義するときに使います．P は新たに導入する記号で，Q には既知の数式が書かれます．例えば

$$f(x) := 1 + 2x \quad \text{や} \quad \mathbf{R} := \{\text{ 実数 }\}, \quad \mathbf{C} := \{\text{ 複素数 }\}$$

は，それぞれ「$f(x) = 1 + 2x$ とおく」「実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と書く」「複素数全体の集合を $\mathbf{C}$ と書く」という意味です．

(4) A $\iff$ B と書いたら「A と B は同値である」という意味です．“$\overset{\text{def}}{\iff}$” とは違います．次のように使います：

$$x \in \mathbf{R} \text{ について次が成り立つ：} \quad x = 0 \iff x^2 = 0$$

(5) $x \in X$ は「x は集合 X に含まれる」「x は X の元（要素）である」という意味です．例えば $x \in \mathbf{R}$ は「x は実数全体の集合の元である」，要するに「x は実数である」ということです．

(6) ベクトル空間の定義に出てくる**スカラー**としては，主に実数や複素数を考えます．実数を考える場合は「$\mathbf{R}$ 上のベクトル空間」，複素数の場合は「$\mathbf{C}$ 上のベクトル空間」が定義されるわけです．どちらでも同じ定理や命題が成り立つ場合も多く，その場合は $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ のことをまとめて $\mathbf{K}$ で表します．

(7) スカラー（実数，複素数）はふつうの文字 $a, b, k, l, \ldots$ などで，（縦）ベクトルは太い文字 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ などで書きます．太字の板書方法は人それぞれなので厄介です．読めないときは質問してください．混同しないのであれば太字にしなくてもよいのですが，たいてい混同するので，がんばって太字を書くようにしたほうが無難です．

(8) n 項ベクトルの縦横は，行列との積を考える際には特に重要です．それ以外ではどちらでもいいのですが，和や内積の計算には縦が便利です（やってみるとわかる）．この講義では太字のベクトル $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$ などは原則として縦ベクトルとします．特に横ベクトルを使いたいときは，行列の転置（教科書の 22 ページ）の記号を使って ${}^t\boldsymbol{u}$ と書きます．縦ベクトルを $n \times 1$ 行列，横ベクトルを $1 \times n$ 行列とみなしているわけです．

3. 線形代数学を学ぶ動機．線形代数は，微積分とともに数学全ての基礎をなし，物理や化学（や，自然科学に関わるあらゆる分野）を学ぶ上でも大切なものです．そのあたりのことを，量子力学を例に取って説明します．大ざっぱで不正確な説明ですし，講義内容には直結しないので，細かい理解は不要です．

分子や原子，さらには素粒子のスケールでは，Newton の古典力学は実験結果と合わなくなり，代わりに**量子力学**が役に立ちます．量子力学においては，系の**状態**（古典力学でいう質点の位置と速度のこと）は **Hilbert 空間** $\mathcal{H}$（ベクトル空間の一種）のベクトルで表され，観測される物理量は $\mathcal{H}$ 上の**線形作用素**（行列のことと思ってください）の**固有値**と理解されます．例えば，数直線 $\mathbf{R}$ 上を運動する粒子の状態は，Hilbert 空間

$$L^2(\mathbf{R}) := \{\boldsymbol{\psi} : \text{一変数関数} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{\psi}(x)|^2 dx < \infty\}$$

の元（つまり，一変数関数）$\boldsymbol{\psi}$ で表されます．また，状態 $\boldsymbol{\psi}$ の粒子の運動量は，$\dfrac{d\boldsymbol{\psi}}{dx} = \lambda\boldsymbol{\psi}$ をみたす λ により与えられます．上で述べた線形作用素とは $\dfrac{d}{dx}$ のこと，固有値とは λ のことです．$\boldsymbol{\psi}$ は**波動関数**とも呼ばれます．
$L^2(\mathbf{R})$ は，10/4 の講義で学んだ**ベクトル空間**の例になっています．実際，$\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in L^2(\mathbf{R})$ と $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ に対し，関数 $k_1\boldsymbol{\psi}_1 + k_2\boldsymbol{\psi}_2$ を

$$(k_1\boldsymbol{\psi}_1 + k_2\boldsymbol{\psi}_2)(x) := k_1\boldsymbol{\psi}_1(x) + k_2\boldsymbol{\psi}_2(x)$$

で定義すれば，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |k_1\boldsymbol{\psi}_1(x) + k_2\boldsymbol{\psi}_2(x)|^2 dx < \infty$ を証明できます（省略します）．よって $k_1\boldsymbol{\psi}_1 + k_2\boldsymbol{\psi}_2 \in L^2(\mathbf{R})$ です．
また，$P\boldsymbol{\psi} := \dfrac{d\boldsymbol{\psi}}{dx}$ と表すことにすると，

$$P(k_1\boldsymbol{\psi}_1 + k_2\boldsymbol{\psi}_2) = k_1P\boldsymbol{\psi}_1 + k_2P\boldsymbol{\psi}_2$$

が成り立ちます．これは，$m \times n$ 行列 A と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{R}^n, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ に対し

$$A(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2) = k_1A\boldsymbol{v}_1 + k_2A\boldsymbol{v}_2$$

が成り立つのと似ています．P は今後の講義でやる**線形写像**というものになっています．このように，量子力学の理論は線形代数学を基礎に展開されます．

$L^2(\mathbf{R})$ はベクトル空間ですが，$\mathbf{R}^n$ の「座標軸」にあたるものを $L^2(\mathbf{R})$ でも考えようとしても，すぐには思いつきません．10/4 の講義で，ベクトル空間を座標を使わず定義したのは，$L^2(\mathbf{R})$ のようなものを想定しているからです．

抽象化によって理論の適用範囲を広げるのが数学のやり方です．例えば**ベクトル空間**は，$\mathbf{R}^n$ の性質を座標によらない形で取り出し抽象化したもので，これにより $L^2(\mathbf{R})$ なども統一的に扱えるようになります．
一方で，抽象化により何をしているのかわからなくなる，ということも起こりがちです．教科書や講義に出てきた具体例を参考に，自分で具体的な計算をやってみる，といったことも必要です．