2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）レポート問題 1 コメント

担当：境 圭一

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ を横に並べて得られる 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & a+1 & b+3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \\ a+1 & 1 & a+3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

の階数が 4 なら $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立で，$\mathbf{R}^4$ の 1 次独立なベクトルの組の最大個数になっているので基底です．$\operatorname{rank} A < 4$ なら基底ではありません．A は 4×4 正方行列なので $\operatorname{rank} A \leq 4$ で，$\operatorname{rank} A = 4 \iff |A| \neq 0$ でした．計算すると $|A| = -2b$ となっています．学籍番号が偶数の人は $|A| = 0$ になりますから「基底でない」，奇数の人は $|A| \neq 0$ ですから「基底である」が正解です．

$\operatorname{rank} A$ を調べるのは，基底の条件 (1)「$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次独立」が成り立つかどうかを調べていることになります．$b = 1$ の人で，条件 (2) の $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ も調べている人が多かったのですが，$\mathbf{R}^4$ の 1 次独立なベクトルの最大個数の組になっていますから，それは不要です．
過程も含めて正しければ 10 点，行列式の計算あるいは基本変形が途中で誤っている場合は 5 点つけました．それ以前の誤り（ベクトルの写し間違い，a, b の値の誤り）の場合は 0〜2 点としました．レポートはあと 1 回ないしは 2 回出題し，合計が 20 点になるように調整する予定です．

よくある間違いですが，行列の基本変形の前後で行列は変化していますから，等号で結ぶのは誤りと言えます．
また，単に式だけを羅列して

$$r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}, \quad r_1 = \cdots = r_4 = 0$$

のように書いている人もいるのですが，これでは $r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$ と仮定しているのか，$r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$ が成り立つと主張しているのか，読み手が推測しないと判断がつきません．きちんと

$$r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0} \quad \text{とおくと，}\cdots \quad r_1 = \cdots = r_4 = 0 \quad \text{となる}$$

のように，話の流れがわかるように書かなければなりません．
言いたいことをきちんと伝える，というのは，どんな業界に身を置くとしても重要なことです．数学を専攻しないことは，数学の講義で論述を疎かにしていい理由にはなりません．日頃から意識して訓練していないと，いざというときに急にできるようにはなりません．この講義に限らず，レポートや試験の答案の書き方には常に注意を払ってください．教科書や論文の文章が参考になるはずです．