2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）レポート問題 2 略解・コメント

担当：境 圭一

講義でやったように

$$f \text{ が単射} \iff \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$$

です．$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ とは

$$\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} f, \quad \text{つまり} \quad f(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

が成り立つこと，つまり，斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ が自明な解しか持たない，ということですから，教科書の命題 2.9 によれば

$$f \text{ が単射} \iff \operatorname{rank} A = 3 \iff \det A \neq 0$$

がわかります．$\det A = (3a + 10)b$ ですから，$b = 0$ の人は「単射でない」，$b = 1$ の人は「単射である」が正解です．
もちろん，$A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ をみたす $\boldsymbol{u} = {}^t(x, y, z)$ を具体的に計算し，$\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ しかなければ f は単射，$\mathbf{0}$ 以外にも解が見つかれば単射でない，と結論づけても構いません．

注意． 具体的に $\operatorname{Ker} f$ の元を一般的な形で求めようとするとき，A に基本変形を施すと便利ですが，このとき行基本変形をしたほうが無難です．行基本変形は，A に左から正則行列をかけることです．もし $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} f$, つまり $A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ なら，行基本変形した後の行列 $B := PA$ について

$$B\boldsymbol{u} = PA\boldsymbol{u} = P\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

となって，$\boldsymbol{u}$ は $B\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ もみたします．つまり，$A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ を求めることと，A に行基本変形を施して得られた $B = PA$ について $B\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ を求めることは等価です．
これに対し，列基本変形は，正則行列を右からかけることです．$A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ と，列基本変形をした後の行列 $C := AQ$ に対し，一般に $C\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ です．正しくは，$\boldsymbol{v} = Q^{-1}\boldsymbol{u}$ とおけば，

$$C\boldsymbol{v} = AQ(Q^{-1}\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

です．つまり，$A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ を求めることと，A に列基本変形を施して得られた $C = AQ$ について $C\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{v}$ を求めることは等価ではなく，$Q^{(-1)}$ をかけるだけのずれがあります．

$\operatorname{rank} A$ または $\det A$ と $A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ の非自明な解の存在の関係がわかっていると思われる答案は，計算ミスしていても，程度により 1 ~ 3 点の部分点をつけました．