2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）レポート問題 3 略解・コメント

担当：境 圭一

固有値は -1 と $5-2a$ です．それぞれに属する固有空間は，例えば

$$V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V(5-2a) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表せます．

固有値は，固有方程式

$$\phi_A(t) := \det(tE_3 - A) = \det \begin{pmatrix} t-2+a & a-3 & 3-a \\ a-3 & t-2+a & 3-a \\ 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix} = 0 \tag{$*$}$$

の解として求まります．直接計算すれば

$$\phi_A(t) = (t-(2-a))^2(t+1) - (a-3)^2(t+1) = (t+1)^2(t-(5-2a))$$

がわかります．

固有値 -1 に属する固有ベクトル $\boldsymbol{u} \in V(-1)$ は，$A\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$, つまり $(-E_3 - A)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ の非自明な解として求められます．$\boldsymbol{u} = {}^t(x,y,z)$ とおけば，$(*)$ の式の形を見て

$$\begin{pmatrix} a-3 & a-3 & 3-a \\ a-3 & a-3 & 3-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \text{つまり} \quad (a-3)(x+y-z) = 0$$

を得ます．$a-3 \neq 0$ ですから $x+y-z=0$ です．一般解は

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbf{C})$$

です．同様に，$\boldsymbol{v} = {}^t(x,y,z) \in V(5-2a)$ は

$$((5-2a)E_3 - A)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3-a & a-3 & 3-a \\ a-3 & 3-a & 3-a \\ 0 & 0 & 2(3-a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} x-y+z=0, \\ z=0 \end{cases}$$

をみたします．一般解は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbf{C})$$

です．