2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）中間試験

担当：境 圭一

※ $\mathbf{R}^n$（の部分空間）の和と実数倍は通常のもの，内積は Euclid 内積とする

※ $\mathbf{R}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は断りなく使ってよい

※答案に書くベクトルは縦横どちらでもよい

1. 次のベクトルの組は 1 次独立かどうか答えよ．（答のみでよい）

(1) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(3) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

2. $\mathbf{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

に対し，$W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, W_2 = \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle \subset \mathbf{R}^3$ とおく．

(1) W_1 の直交補空間 $W_1^{\perp}$ の基底を一組求めよ．（答のみでよい）

(2) 和空間 $W_1 + W_2$ は直和か答えよ．直和でないときは $W_1 \cap W_2$ の基底を一組求めよ．（答のみでよい）

3. 次の 1 次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に対し Gram-Schmidt の直交化法を（講義でやった順序で）適用して得られる正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．（答のみでよい）

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

4. 次の集合 V_1, V_2 は，通常の和と実数倍に関して $\mathbf{R}$ ベクトル空間ではない．その理由を答えよ．

(1) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} y = z = 0 \text{ または } z = x = 0 \\ \text{または } x = y = 0 \end{array} \right\}$

(2) $V_2 = \{$ 実数を係数とする x の 3 次多項式 $\}$

5. A を $n \times n$ 直交行列とするとき，行列式 $|A|$ を求めよ．計算過程も示すこと．

配点：15, 10, 10, 10, 5 （各小問一つにつき 5 点，50 点満点）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_linear/16_linear.html