線形代数学 **II**（物理学コース・化学コース）中間試験（**2016** 年 **11** 月 **22** 日）解答・解説

担当：境 圭一

解答.

1. (1) 1 次独立である
   (2) 1 次独立でない
   (3) 1 次独立でない

2. (1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (2) 直和でない．$W_1 \cap W_2$ の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3. (1) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (2) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{60}}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. (1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in V_1$ だが $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \notin V_1$ だから.
   (2) $\mathbf{0} \notin V_2$ だから.

5. A は直交行列だから ${}^tAA = E_n$, よって $|{}^tAA| = |E_n| = 1$. 左辺は $|{}^tA||A| = |A|^2$ だから $|A|^2 = 1$, よって $|A| = \pm 1$.

解説.

1. (2) $\dim \mathbf{R}^3 = 3$ だから，$k > 3 \implies \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbf{R}^3$ は 1 次従属.
   (3) $\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_4 \end{pmatrix}\right| = 0$ より 1 次従属．実は $2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 - 5\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$ である.

2. (1) $\boldsymbol{u} = {}^t(a, b, c) \in W_1^{\perp}$ とすると $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}_2$ より $a = 2b, b = c$ となる．${}^t(2, 1, 1)$ の 0 でない実数倍も正解.
   (2) $\boldsymbol{u} \in W_1 \cap W_2$ とすると $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 = c\boldsymbol{v}_3 + d\boldsymbol{v}_4$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ と表せる．これを解くと $\boldsymbol{u} = c \cdot {}^t(-2, -1, 5)$.

3. 具体的な計算問題は，正しいかどうかを判断する材料に乏しいのでリスクが高い．しかしこの問題に関しては，答が直交系になっているか確認するのが比較的容易なので，ある程度リスク回避できる.

4. (2) 多項式全体からなるベクトル空間のゼロベクトルとは，多項式としての 0, つまり $1, x, x^2, \ldots$ の係数がすべて 0 の多項式である．解答例は V_2 がスカラー倍で閉じていないこと，つまり $f(x) \in V_2$ でも $0 \cdot f(x) = 0 \notin V_2$, ということを意味する．別解として，例えば $f(x) = x^3 + 1, g(x) = -x^3 + 1 \in V_2$ だが $f(x) + g(x) = 2 \notin V_2$ だから，といった理由でもよい.

5. 11/15 の演習問題 1 参照．一般に ± 1 どちらもあり得る．例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ はどちらも直交行列で，$|A| = +1, |B| = -1$.

配点：15, 10, 10, 10, 5 （各小問一つにつき 5 点，50 点満点）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_linear/16_linear.html