2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）期末試験

担当：境 圭一

※ $\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$（の部分空間）の和と実数倍は通常のものとする

※ $\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ は断りなく使ってよい

※答案にベクトルを書く場合は縦横どちらでもよい

※虚数単位は $\sqrt{-1}$ または i のどちらを使ってもよい（ただし判読できるようにすること）

1. V, W を $\mathbf{K}$ ベクトル空間とする ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$). 写像 $f : V \to W$ が線形であることの定義を述べよ.

2. 次の線形写像 f_k について，$\ker f_k$ の次元 $\dim\ker f_k$ を求めよ．（答のみでよい）
   (1) $f_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1,\quad f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := x + 2y$
   (2) $f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\quad f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 4y \end{pmatrix}$
   (3) $f_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3,\quad f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x - 4y \\ 3x + 6y \end{pmatrix}$
   (4) $f_4 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2,\quad f_4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 3x - 2y + z \end{pmatrix}$

3. 次の正方行列 A_k について，その固有値を複素数の範囲ですべて求めよ．また $P^{-1}A_kP$ が対角行列になるような複素正則行列 P がある場合はそれを一つ求め，ない場合は「存在しない」と答えよ．（いずれも答のみでよい）
   (1) $A_1 := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
   (2) $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (3) $A_3 := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   (4) $A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. A を $n \times n$ 行列とし，$\lambda \in \mathbf{C}$ を A の固有値の一つとする．λ に属する A の固有空間 $V(\lambda)$ は $\mathbf{C}^n$ の部分ベクトル空間であることを証明せよ．

配点：5, 20, 20, 5（各小問一つにつき 5 点，50 点満点）