2016 年度 線形代数学 II（物理学コース・化学コース）期末試験 解答例・解説

担当：境 圭一

解答例

1. 各 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ とスカラー $a, b \in \mathbf{K}$ に対し $f(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{u}) + bf(\boldsymbol{v})$ が成り立つこと．
2. (1) 1

   (2) 0

   (3) 1

   (4) 1
3. (1) 固有値は $-1, 4$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (2) 固有値は $1 \pm 2\sqrt{-1}$. $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$

   (3) 固有値は $-1, -3$. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (4) 固有値は $1, 2$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V(\lambda)$, $a, b \in \mathbf{C}$ とすると，$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから

   $$A(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) = aA\boldsymbol{u} + bA\boldsymbol{v} = a\lambda\boldsymbol{u} + b\lambda\boldsymbol{v} = \lambda(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}),$$

   よって $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$. 従って $V(\lambda)$ は部分ベクトル空間である．

解説

1. 和とスカラー倍について別々に述べてあってもよい．
2. $f_k(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ の一般形を，連立方程式を解いて求めるのが一番簡単だろう．いずれの f_k も，何らかの行列 B_k を使って $f_k(\boldsymbol{u}) = B_k\boldsymbol{u}$ と表せるから，$\operatorname{rank} B_k = \dim \operatorname{Im} f_k$ を計算し，次元定理 $\dim\ker f_k + \dim\operatorname{Im} f_k = n$（ただし n は f_k の定義域の次元）に代入して求めることも可能である．もっとも，これは連立方程式を解いているのと等価である．
3. 固有値は固有方程式 $|tE - A| = 0$ の解であった．それぞれに属する固有空間の基底を求めてすべて集めたものが $\mathbf{C}^n$ の基底になっていれば対角化可能で，P としてはそれらの基底（縦ベクトル）を横に並べて得られるものを取ればよい．答は基底の取り方によって変わりうるから，上の解答例と異なる答もあり得る．なお A_1 は対称行列で，(1) の解答例の P を $1/\sqrt{5}$ 倍すると直交行列になる．
4. 講義では，$f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ を $f(\boldsymbol{u}) := (\lambda E_n - A)\boldsymbol{u}$ で定めれば $V(\lambda) = \ker f$ で，$\ker f$ はベクトル空間だから $V(\lambda)$ もそうである，という説明をした．これももちろん正解．

配点：5, 20, 20, 5 （各小問一つにつき 5 点，50 点満点）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/16_linear/16_linear.html