幾何入門 演習問題 1（2017 年 4 月 7 日）

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}), \boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ を計算せよ．

 (2) (1) の $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ に対し $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$ を計算し，一致しないことを確かめよ．

2.（線形代数の教科書を参照せよ）$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトルとする．

 (1) $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k$ が**一次独立**であることの定義を述べよ．また，$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k$ が**一次従属**であることの定義を述べよ．

 (2) $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k$ が一次独立であるとき，$i=1,\ldots,k$ に対し $\boldsymbol{u}_i\neq\boldsymbol{0}$ であることを示せ．

3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}$ などは全て $\mathbb{R}^3$ のベクトルとする．以下を示せ．

 (1) $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$. また，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が一次従属

 (2) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$

 (3) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$（ヒント：(2) を使う）

 (4) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}$（ヒント：4/7 の講義の補題 4 を使う）

 (5) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}))\cdot\boldsymbol{a}$（ヒント：(4) を使う）

 (6) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ （ヒント：(2), (5) を使う）

 (7) $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ とし，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角を θ とするとき，$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta$ （ヒント：(6) を使う）

4. $\mathbb{R}^2$ の一次独立なベクトル $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ を横に並べて得られる 2×2 行列を $A:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ を二辺とする平行四辺形の面積は $|\det A|$ に等しいことを示せ．$\det A>0$ になるときと $\det A<0$ になるときの違いは何か？

5. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$ に対し，**三角不等式**

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}|\leq|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|+|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}|$$

 を証明せよ．（ヒント：Cauchy-Schwarz の不等式より $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\leq|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}|$ であることを使う）

6. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^3$ がこの順で右手系をなすとは，$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}>0$ をみたすことと定義される．

 (1) $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\in\mathbb{R}^3$ を標準基底とする．$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ はこの順で右手系だが，$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$ はそうではないことを示せ．

 (2) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}=-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{w}=-\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$ とする．$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ はこの順で右手系をなすことを示せ．この $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ を図示し，教科書の図 1.4 と見比べよ．

（提出の必要はありません）

補足．4/7 の講義では，ベクトルを $\boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^n$ から延びる矢印のように捉えました．今後の講義では，$\boldsymbol{0}$ 以外の点を始点と捉えたほうがよいこともあります（平行移動してもベクトルは同じとみなす，ということは高校でもやったと思います）．また $\boldsymbol{0}$ から延びる矢印の終点，要するに $\mathbb{R}^n$ の点のこともベクトルで表したりします．数学的にはどれも同じベクトルですが，気分が違うわけです．その時々のベクトルが何を表すか見極めるには，深谷先生の教科書がやっているように，物理的（力学的）な視点が役立ちます．

同じものを表す記号が複数ある，というのはよくあることなので注意してください．この講義では，行列 A の行列式は $\det A$ で，転置行列は ${}^tA$ で，ベクトルの内積は $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ で表します．線形代数の講義ではそれぞれ $|A|, A^T, \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$ などで（あるいは，これら以外で）表したかもしれません．また教科書ではベクトルの長さを $\|\boldsymbol{u}\|$ と表していますが，この講義では $|\boldsymbol{u}|$ と書いています．講義中に現れた記号は断りなく使って構いませんが，他の記号も，それが何を表すかが明確であれば，使っても構いません．ただし，意味が通らない書き方はダメです．**正しい意思疎通のためには，一般的な言い回しを使うべきです**．過去の経験上，内積を“$\boldsymbol{uv}$”のように書いてしまう人が非常に多いのですが，これは意味が通りません．過去もそうだったのですが，今回もかなりしつこく減点しますから注意してください．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html

幾何入門 レポート問題 1（2017 年 4 月 7 日）

担当：境 圭一

4/7 の講義で省略した補題 5 (3) の証明を完成させよ．つまり，以下を示せ：
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ に対し $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\end{pmatrix} = |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|^2$. また $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が一次独立であるとき，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ は右手系をなす．
（ヒント：4/7 の講義の補題 4 と，演習問題 3. (1) を使う）

（4/14 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html