

特に断らなければ $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする. $\mathbf{0}$ は \mathbb{R}^2 の原点 (ゼロベクトル) である.

1. 次の二変数関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を考える:

$$f(\mathbf{u}) := \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad (\mathbf{u} \neq \mathbf{0}), \quad f(\mathbf{0}) = 0.$$

- (1) f は $\mathbf{0}$ において連続であることを示せ. (ヒント: 極座標 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を使う)
 - (2) $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})$ が存在することを示し, その値を求めよ. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ は $\mathbf{0}$ において連続か?
 - (3) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, |\mathbf{v}| = 1$ とする. 点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ における f の \mathbf{v} 方向の方向微分を定義通り計算せよ.
 - (4) (3) の方向微分の値が最小になるときの \mathbf{v} を求めよ.
 - (5) $\text{grad}(f)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算し (4) と比較せよ.
2. (1) 二変数関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(\mathbf{u}) := x^2 - y$ で定義する. $\text{grad}(f)$ を求めよ.
- (2) $k \in \mathbb{R}$ に対し, $f^{-1}(k) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{u}) = k\}$ とおく. $f^{-1}(k)$ を図示せよ.
- (3) $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in f^{-1}(k)$ において $f^{-1}(k)$ に接する直線を求めよ.
- (4) $\text{grad}(f)(\mathbf{u}_0)$ は (3) の直線と直交することを示せ.
3. 次のベクトル場を図示せよ. ただし (3), (4) では原点での値は考えない.
- (1) $\mathbf{W}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\mathbf{V}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ (3) $\mathbf{T}(\mathbf{u}) := \frac{1}{|\mathbf{u}|} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ (ヒント: $|\mathbf{T}(\mathbf{u})|$ の値は?)
- (4) $\mathbf{G}(\mathbf{u}) := -\frac{1}{|\mathbf{u}|^3} \mathbf{u}$ (ヒント: 原点近くでの $|\mathbf{G}(\mathbf{u})|$ の値は? 原点から遠いところでは?)
4. (1) $f(\mathbf{u}) = xy$ とおく. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおき, f を r, θ を使って表せ.
- (2) (1) の結果を $g(r, \theta)$ とおく. θ を一つ固定する. $z = g(r, \theta)$ のグラフを rz 平面に描け. (θ で場合分けせよ)
- (3) (2) で描いたグラフを全ての θ について考えることにより, $z = f(\mathbf{u})$ のグラフを完成させよ.
- (4) $\text{grad}(f)$ を図示せよ. また $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ となる \mathbf{u} を求めよ.
5. 次の $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ について, そのグラフを描け. また $\text{grad}(f)$ を図示し, $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ となる \mathbf{u} を全て求めよ.
- (1) $f(\mathbf{u}) = x^2 - y^2$ (2) $f(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2}$ (ただし $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ とする)
- (3) $f(\mathbf{u}) = x^2 y$ (ヒント: 定数 k に対し, 平面 $y = k$ で切った切り口を考える. $k > 0, k = 0, k < 0$ で場合分けせよ)

(提出の必要はありません)

補足. 「場」というのは物理の用語で, 各点において何らかの値が定まるような対応のことを言います. 数学的には「関数」または「写像」と同義です. 例えば地球上の点 \mathbf{u} における風の強さ $\mathbf{W}(\mathbf{u})$ や重力 $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ などは, 各点 \mathbf{u} において向きと大きさを持つ値, すなわちベクトルが定まるような対応なので「ベクトル場」と呼びます. 別の例として, 点 \mathbf{u} における気温 $T(\mathbf{u})$ は, 各点においてスカラー (実数) が定まるような対応なので「スカラー場」と呼びます. 数学ではスカラー場のことを通常は関数と呼びます. ベクトル場のことはベクトル値関数と呼んだりもします. これらの例から, ベクトル場 \mathbf{V} とは, 気持ちとしては, 各点 \mathbf{u} に対し \mathbf{u} を始点とするベクトル $\mathbf{V}(\mathbf{u})$ を対応させるものだと考えておくとよいことがわかります (そんなことは定義のどこにも書かれていないが).

関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ があるとベクトル場 $\text{grad}(f): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ができます. 講義では, $z = f(x, y)$ のグラフの勾配が最も急になる方向が $\text{grad}(f)$ だということを見ました. つまり, 点 \mathbf{u} が $\text{grad}(f)(\mathbf{u})$ の方向に動くとき, f の値は最も急激に変化するわけです. 一方, 点 \mathbf{u} が $f^{-1}(k)$ 上を動く間, $f(\mathbf{u})$ は一定値 k から変化しません. このように, $\text{grad}(f)$ の方向と $f^{-1}(k)$ の方向は, f の値の変化という観点からは正反対の性質を持ちます. 実際, 問題 2 (4) はこれらが直交する, と言っています. 実はこれは $f = x^2 - y$ に限らず, 一般の f で成立します.

幾何入門レポート問題 2 (2017 年 4 月 14 日)

担当：境 圭一

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し $f(\mathbf{u}) := \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$ とする. $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ となる $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ.

(4/21 の 3 限開始時まで提出してください)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html