

$\text{grad}(f) = \frac{2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} -2xy \\ x^2 - y^2 + 1 \end{pmatrix}$ です. これを間違えるとどうにもなりません.
 答案の書き方として,

$$\text{(あまりよくない)} \quad \text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ より } \begin{cases} xy = 0 \\ x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

という答案は, 意地悪な読み方をすれば, 「(何らかの理由で) 必ず $\text{grad}(f) = \mathbf{0}$ であり, 従って \mathbf{u} としては連立方程式をみたすものしか考えることはできない」と主張しているように読めなくもありません. 実際はそうではなく, 任意の \mathbf{u} に対し $\text{grad}(f)(\mathbf{u})$ というベクトルが定まるが, その中で $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ をみたすものはこれである, と主張したいわけですから, 例えば $\text{grad}(f)$ を具体的に求めた上で

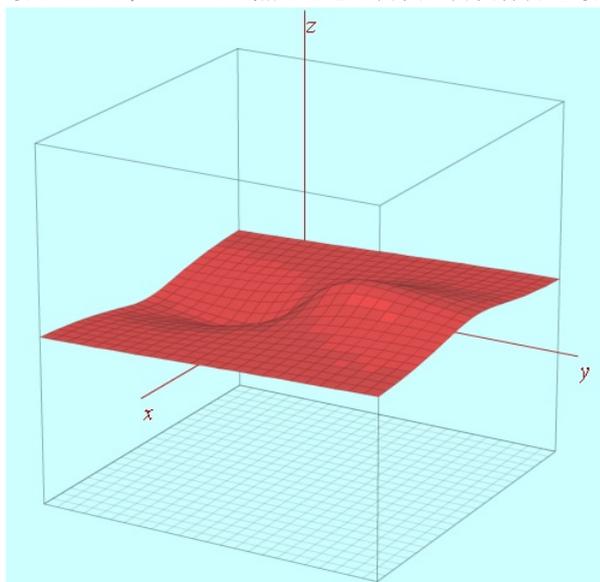
$$\text{(よい)} \quad \text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ となるための必要十分条件は } \begin{cases} xy = 0 \\ x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \text{ である.}$$

と書けば間違いのないと思います.

$\frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 0$ から $xy = 0$, $\frac{2(x^2 - y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 0$ から $x^2 - y^2 + 1 = 0$ が出るわけですが, そのときに理由として「 $x^2 + y^2 + 1 > 0$ だから」と書いている答案が多いのが気になりました. これらは単に分母を払っただけで, $x^2 + y^2 + 1 > 0$ を本質的に使ったわけではありません. $x^2 + y^2 + 1 > 0$ を使うところがあるとするれば, f の定義式に分母が 0 にならず, したがって f は \mathbb{R}^2 全体で定義される, というところです.

$xy = 0$ から $x = 0$ または $y = 0$ が出るわけですが, これを書かずにいきなり「 $x = 0$ のとき..., $y = 0$ のとき...」と書いている人がいました. これだと $x \neq 0, y \neq 0$ のときを調べていないように見えてしまいます. また「 $x = 0, y \neq 0$ または $y = 0, x \neq 0$ 」のように書いている人がいました. これは誤りです. $x = y = 0$ もあり得ます.

なお, この問題の f のグラフは下のようになります. $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ となる $\mathbf{u} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ において f は最大値と最小値を取っており, これらの点ではどの方向に方向微分を取っても 0, つまりグラフに勾配がないことが見て取れます.



参考: 2変数関数グラフ Yokatoki Flash 版,

http://www1.kiy.jp/~yoka/GraphYokatoki/GraphYokatoki2_FLASH.html

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html