幾何入門 演習問題 3（2017 年 4 月 21 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

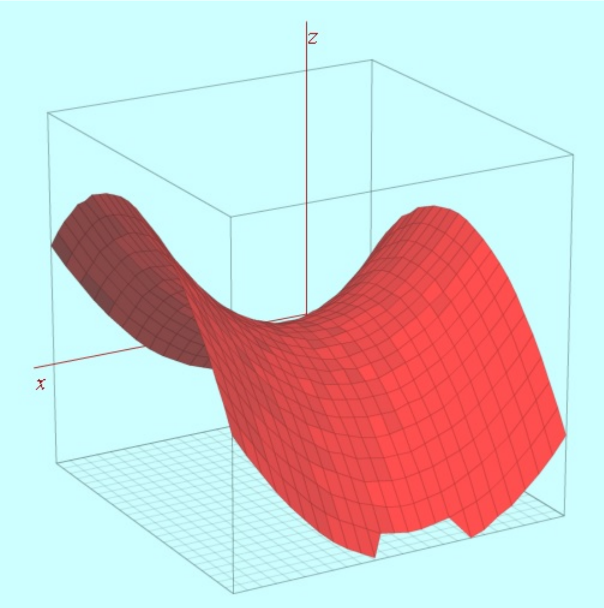
1. 次のパラメータ $\boldsymbol{l}$ が定める曲線 $L \subset \mathbb{R}^2$ を図示せよ．
   (1) $\boldsymbol{l}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$ （a, b は定数，$0 < a \leq b$） (2) $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ t \end{pmatrix}$
   (3) $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$ (4) $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$（ヒント：$x = t^2, y = t^3 - t$ の増減を考えよ）
2. (1) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{ab}\begin{pmatrix} -y \\ 2x \end{pmatrix}$ と前問 (1) の $\boldsymbol{l}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -y \\ 1 - x \end{pmatrix}$ と前問 (2) の $\boldsymbol{l}$（ただし $-1 \leq t \leq 1$ とする）に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
3. (1) $\boldsymbol{l}\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix}$ が定める曲線 L を図示せよ．また $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (2) $h\colon [0, \pi] \to [-1, 1], h(t) := -\cos t$ は $h' \geq 0$ をみたすことを示せ．$\widetilde{\boldsymbol{l}} := \boldsymbol{l} \circ h$ とおき，$\displaystyle\int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}} \boldsymbol{V} \cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}}$ を計算し (1) と比較せよ．$\hat{h}(t) := \cos t$ の場合はどうか？
4. $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を二変数 C^∞ 級関数，$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を一変数 C^∞ 級関数，$\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を曲線の正則パラメータ，$a, b \in \mathbb{R}$ を定数とする．二変数関数 $af + bg, fg\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と $h \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 曲線のパラメータ $\boldsymbol{l} \circ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を
   $$(af + bg)(\boldsymbol{u}) := af(\boldsymbol{u}) + bg(\boldsymbol{u}), \quad (fg)(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u})g(\boldsymbol{u}), \quad (h \circ f)(\boldsymbol{u}) := h(f(\boldsymbol{u})), \quad (\boldsymbol{l} \circ h)(t) := \boldsymbol{l}(h(t))$$
   で定める．次のことを示せ：
   $$\begin{aligned} &\mathrm{grad}(af + bg) = a\,\mathrm{grad}(f) + b\,\mathrm{grad}(g), &&\mathrm{grad}(fg)(\boldsymbol{u}) = g(\boldsymbol{u})\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{u})\mathrm{grad}(g)(\boldsymbol{u}), \\ &\mathrm{grad}(h \circ f)(\boldsymbol{u}) = h'(f(\boldsymbol{u}))\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}), &&\frac{d(\boldsymbol{l} \circ h)}{dt}(t) = h'(t)\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(h(t)) \end{aligned}$$
5. $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ で定義する．$\boldsymbol{l}$ が表す曲線 L を図示せよ．任意の C^∞ 級関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，$h' > 0$ をみたし，$h(s_0) = 0$ となる s_0 が存在するものに対し，$\dfrac{d(\boldsymbol{l} \circ h)}{ds}(s_0) = \boldsymbol{0}$ であることを示せ．
6. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．$\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ が表す曲線（f のグラフ）上の点 $\boldsymbol{l}(t_0)$ における接線は $\boldsymbol{m}(t) := \boldsymbol{l}(t_0) + (t - t_0)\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t_0)$ で表せることを示せ．$\boldsymbol{m}$ の第 2 成分と，f の $t = t_0$ における Taylor 展開を比較せよ．
7. 人工衛星を打ち上げるには（重力に対して）仕事が必要だが，周回軌道に乗った後は仕事は必要でない．このことを次のようなモデルで検証しよう．$\mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\} := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}\}$ とする．
   (1) 地球の重力のモデルとして，$\mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) := -\dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^3}\boldsymbol{u}$ を考える．地球の半径を r とし，高さ h までの打ち上げの軌道として，$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ が表す線分 $\boldsymbol{l}\colon [r, r + h] \to \mathbb{R}^2$ を考える．$-\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．
   (2) $\boldsymbol{m}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ で定まる曲線 $\boldsymbol{m}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ に対し，$-\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{m}$ を求めよ．
   (3) (1) の線積分の $h \to +\infty$ における極限値が有限であることを示し，その物理的な意味を考えよ．

（提出の必要はありません）

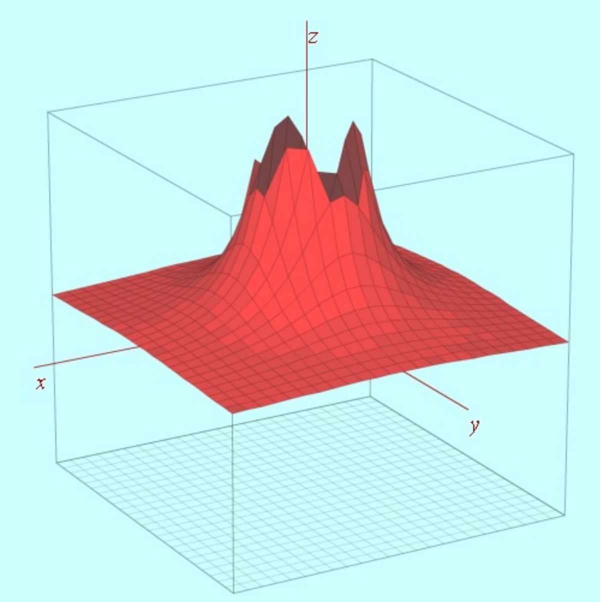
補足． 曲線のパラメータ $\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ に対し，$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) := \begin{pmatrix} l_1'(t) \\ l_2'(t) \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{l}(t)$ における $\boldsymbol{l}$ の速度ベクトルと呼びました．実際，$\boldsymbol{l}(t)$ が動点の時刻 t における位置を表すとすると，$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ は時刻 t における動点の速度に他なりません：時刻 t から $t + \epsilon$ の間に動点は $\boldsymbol{l}(t + \epsilon) - \boldsymbol{l}(t)$ だけ動きますから，このときの平均速度は $\dfrac{\boldsymbol{l}(t + \epsilon) - \boldsymbol{l}(t)}{\epsilon} \cdots (*)$ です．$\epsilon \to 0$ の極限が時刻 t における速度ですが，$(*)$ の第 k 成分 $(k = 1, 2)$ は $\dfrac{l_k(t + \epsilon) - l_k(t)}{\epsilon}$ で，$\epsilon \to 0$ での極限値は $l_k'(t)$ です．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html

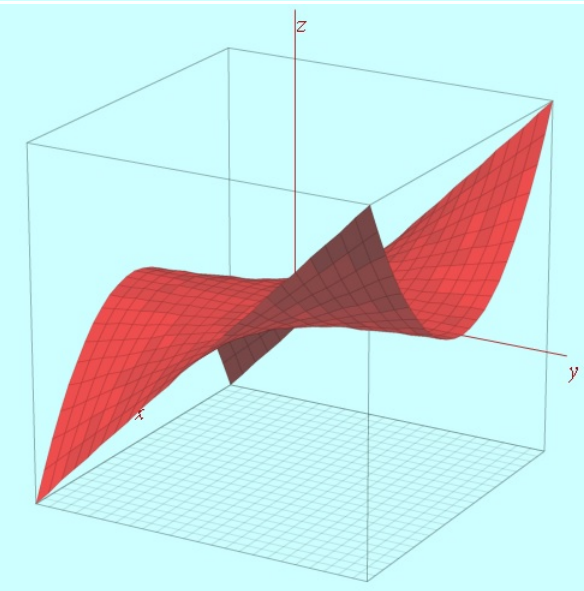
演習問題 2. 5. (1)-(3) の関数のグラフ



$z = x^2 - y^2$ のグラフ．z 軸に直交する平面 $z = k$ で切ると，$k \neq 0$ のとき双曲線 $x^2 - y^2 = k$ が現れる．この双曲線は，$k > 0$ のとき x 軸と $(\pm\sqrt{k}, 0)$ で交わり，$k < 0$ のとき y 軸と $(0, \pm\sqrt{-k})$ で交わる．これらは共に $k \to 0$ の極限で原点で交わる 2 直線 $y = \pm x$（双曲線の漸近線）に「退化」する．



$z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ のグラフ．$x = y = 0$ で発散している．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと $z = \dfrac{1}{r^2}$. 偏角 θ の rz 平面で切った切り口は $z = \dfrac{1}{r^2}$ のグラフ．
また，z 軸に垂直な平面 $z = k$ での切り口は，$k \leq 0$ のとき $\emptyset$, $k > 0$ のときは原点を中心とし半径 $\sqrt{k^{-1}}$ の円である．xy 平面に近いほど半径は大きく，上に行くほど小さくなる．



$z = x^2 y$ のグラフ．y 軸に垂直な平面 $y = k$ で切った切り口は，$k > 0$ のとき「下に凸」な放物線，$k = 0$ のとき直線 $z = 0$, $k < 0$ のとき「上に凸」な放物線である．
また，x 軸に垂直な平面 $x = k$ で切った切り口は，直線 $z = k^2 y$ である，この直線の傾き k^2 は 0 以上で，原点から離れるほど大きくなる．

参考：2 変数関数グラフ Yokatoki Flash 版，
`http://www1.kiy.jp/~yoka/GraphYokatoki/GraphYokatoki2_FLASH.html`

幾何入門 レポート問題 **3**（**2017** 年 **4** 月 **21** 日）

担当：境 圭一

ベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y-1 \\ x+1 \end{pmatrix}$ と，パラメータ $\boldsymbol{l}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 1-t \\ \sqrt{1-(1-t)^2} \end{pmatrix}$ で表される曲線 L に対し，$\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．（ヒント：定義通りにもできるが，L を図示し，向きに注意してパラメータ変換を考えると楽になる）

（4/28 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html