

特に断らなければ  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とし, また  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  とする

- 次の関数  $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  について,  $\Omega_i := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f_i(\mathbf{u}) < 0\}$ ,  $L_i := f_i^{-1}(0) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f_i(\mathbf{u}) = 0\}$  とおく.  $\Omega_i, L_i$  を図示せよ. また  $L_i$  は正則な曲線 (の和集合) であることを示せ.  $\Omega_i$  は弧状連結か?
  - $f_1(\mathbf{u}) = 2x + y - 1$     (2)  $f_2(\mathbf{u}) = 2x^2 + y^2 - 1$     (3)  $f_3(\mathbf{u}) = x^2y - 1$
  - $f_4(\mathbf{u}) := (|\mathbf{u} - 2\mathbf{e}_1|^2 - 1)(|\mathbf{u} + 2\mathbf{e}_1|^2 - 1)$     (5)  $f_5(\mathbf{u}) = (|\mathbf{u}|^2 - 16)(|\mathbf{u} - 2\mathbf{e}_2|^2 - 1)(|\mathbf{u} + 2\mathbf{e}_2|^2 - 1)$
- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(\mathbf{u}) := (|\mathbf{u}|^2 - 1)^2$  で定義し,  $L := f^{-1}(0)$  とおく.  $\mathbf{u} \in L$  に対し  $\text{grad}(f)(\mathbf{u})$  を計算せよ.  $L$  は正則か?
- (1)  $\mathbb{R}^n$  自身は  $\mathbb{R}^n$  の開集合であることを示せ.
  - $A := [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  は  $\mathbb{R}$  の開集合でも閉集合でもないことを示せ.  $A$  の内部  $A^\circ$  を求めよ.
  - $B := (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$  は  $\mathbb{R}$  の閉集合であることを示せ.  $B^\circ$  を求めよ.
  - $C := (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$  は  $\mathbb{R}$  の開集合であることを示せ.  $C^\circ$  を求めよ.
  - 任意の集合  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  に対し,  $\Omega^\circ$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合であることを示せ. ただし空集合  $\emptyset$  は  $\mathbb{R}^2$  の開集合と定める.
- $\Lambda$  を (可算とは限らない) 集合とし, 各  $\lambda \in \Lambda$  に対し  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U_\lambda$  が定まっているとする. このとき,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  と  $\bigcap_{k=1}^m U_{\lambda_k}$  ( $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$ ) はともに  $\mathbb{R}^n$  の開集合であることを示せ.  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  が開集合とならない例を挙げよ.
- $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$  を中心とし, 半径 1 である円周を  $S^1$  と書き, 1 次元球面と呼ぶ. すなわち  $S^1 := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{u}| = 1\}$ .
  - $S^1$  は  $\mathbb{R}^2$  の閉集合であることを示せ.
  - 次の文は「 $S^1$  は弧状連結である」ことの誤った証明である. 間違いを指摘せよ.  
「証明 (誤り)」任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^1$  に対し,  $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1$  を  $\gamma(t) := (1-t)\mathbf{u} + t\mathbf{v}$  で定めると,  $\gamma(t)$  は  $t$  の 1 次式だから連続で,  $\gamma(0) = \mathbf{u}, \gamma(1) = \mathbf{v}$  である. よって  $S^1$  は弧状連結である.
  - 実は「 $S^1$  は弧状連結である」という主張は真である. 正しい証明を与えよ.
- (1)  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  が弧状連結な領域で  $U \cap V \neq \emptyset$  であるとき, 和集合  $U \cup V$  も弧状連結であることを示せ.  
(2) 弧状連結な領域  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  で, 共通部分  $U \cap V$  は弧状連結でないようなものの例を挙げよ.

(提出の必要はありません)

補足. ●これ以降の講義で現れる領域やその境界として, 二変数関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を使って  $\Omega_f := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{u}) < 0\}$ ,  $L_f := f^{-1}(0)$  と表されるものが重要です. 例えば  $\Omega = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\mathbf{u}) > 1\}$  という領域もありますが,  $f(\mathbf{u}) := 1 - g(\mathbf{u})$  とおけば  $\Omega = \Omega_f$  ですから,  $\Omega_f$  の形のものだけ考えれば十分です. 講義の系 32 によれば,  $L_f$  の各点  $\mathbf{u}$  で  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$  なら  $L_f$  は正則ですが, その逆は成り立たないことに注意してください. つまり,  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{u} \in L_f$  があつたとしても,  $\mathbf{u}$  において  $L_f$  が正則か否かは, 別途調べてみないとわかりません. 4/28 の問題 2 をご覧ください.

● $\mathbb{R}^n$  の開 (閉) 集合, 弧状連結性などについては, 後期の「位相空間論」において, より一般的な視点から論じます. この講義で大切なのは, 領域と言ったら弧状連結な開集合のことを指し, 従って領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  について (1) 任意の  $\mathbf{u} \in \Omega$  に対し,  $U(\mathbf{u}; r) \subset \Omega$  となる  $r > 0$  が存在し, (2) 任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Omega$  を結ぶ道  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  が存在する, ということです. より重要なのは (1) で, 各点  $\mathbf{u} \in \Omega$  の「近く」がすべて  $\Omega$  に含まれることを意味します. 例えば  $\mathbb{R}^1$  の開区間  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid a < x < b\}$  について, 任意の  $x \in (a, b)$  に対し,  $\epsilon > 0$  を十分小さくとれば (例えば  $\frac{b-x}{2}$  と  $\frac{x-a}{2}$  のうち小さいほうを  $\epsilon$  とすれば)  $U(x; \epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$  が成り立つので,  $(a, b)$  は開集合です. 例えば  $x \in (a, b)$  が  $b$  に非常に近かったとしても,  $\epsilon$  くらいなら  $x$  から右に進んでも  $(a, b)$  からはみださない, というわけで, ある意味で「どこまでも先に行ける」という感覚があります. これに対し, 閉区間  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid a \leq x \leq b\}$  は  $\mathbb{R}^1$  の閉集合ですが,  $x = b \in [a, b]$  については, ほんの少しでも右に行くと  $[a, b]$  からはみだしてしまいます. このように, 閉集合については「これ以上は先に行けない限度」のようなものがある, という感覚があります.

●この講義の意味での領域  $\Omega$  の境界点は, 一般に  $\Omega$  には含まれません. 上の  $\Omega_f$  と  $L_f$  がその例です.

[http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17\\_geometry/17\\_geometry.html](http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html)

幾何入門 レポート問題 4 (2017 年 4 月 28 日)

担当：境 圭一

定数  $k \in \mathbb{R}$  は  $|k| < 1$  をみたすとする.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbf{u}) = \frac{2y}{|\mathbf{u}|^2 + 1} - k$  について,  $\Omega := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{u}) < 0\}$  で表される領域  $\Omega$  を図示せよ. (ヒント:  $\Omega$  の境界  $\partial\Omega$  と  $y$  軸の交点の正負に注意せよ)

(5/12 の 3 限開始時まで提出してください)

[http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17\\_geometry/17\\_geometry.html](http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html)