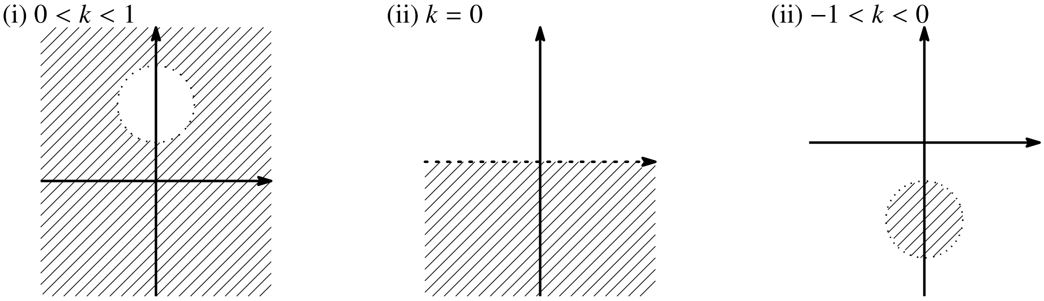
幾何入門 レポート 4（2017 年 4 月 28 日）コメント

担当：境 圭一

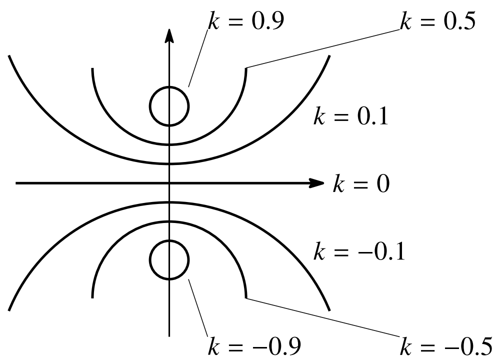
$f(\boldsymbol{u}) < 0$ を書き換えると

(i) $0 < k < 1$ のとき $x^2 + (y - \frac{1}{k})^2 > \frac{1}{k^2} - 1$
(ii) $k = 0$ のとき $y < 0$
(iii) $-1 < k < 0$ のとき $x^2 + (y - \frac{1}{k})^2 < \frac{1}{k^2} - 1$

です．(i) と (iii) で不等号の向きが変わるのは，k の正負によって割ったときの不等号の向きが変わるからです．**これは中学校でやるはずだと思います．こういうのを間違えてはいけません．**
(i) と (iii) について，円の中心の y 座標の絶対値 $\frac{1}{|k|}$ と半径 $\sqrt{\frac{1}{k^2} - 1}$ を比べると $\frac{1}{|k|}$ のほうが大きいことがわかるので，(i) のとき円は $y > 0$ の領域に，(iii) のとき円は $y < 0$ の領域に含まれます．このことは，(i) $k > 0$ のとき $f(\mathbf{0}) = -k < 0$ より $\mathbf{0}$ は求める領域に含まれること，(iii) $k < 0$ のとき $f(\mathbf{0}) = -k > 0$ より $\mathbf{0}$ は求める領域に含まれないこと，からもわかります．
以上のことを踏まえると，領域はだいたい次の図のようになります：



なぜかこれらの共通部分が答だとしている答案が見られましたが，そうではありません．[*1]
(i), (iii) の $\partial\Omega$ を表す円について，k が 0 に近づくとき，中心 $(0, \frac{1}{k})$ は "$(0, \pm\infty)$" に逃げていき，半径も ∞ に発散します．行きついた先が直線 $y = 0$（つまり x 軸）という感じになっています．次の絵は k ごとに $\partial\Omega$ のだいたいの形を描いたもので，関数 $z = f(\boldsymbol{u})$ のグラフの「等高線」にもなっています．



(iii) の円は (i) を「裏返した」ようなもので，(ii) の x 軸は「無限遠点を通る円」になっている，と言えます．

繰り返しますが，もはや当たり前のことながら，負の数で割ると不等号の向きは変わります．こういった類の危うい操作というのはいろいろあって

- 文字で割るときは，その文字が 0 でないか，また不等式の場合はその文字が正か負か
- 偶数乗根を取るときは，その数が負でないか

[*1] 蛇足ですが，仮に共通部分が答なのだとして，k を $-1 < k < 1$ の範囲ですべて動かして上の領域の共通部分を取ると，結果は一点集合 $\{(0, -1)\}$ です．共通部分を取っている人で，共通部分を正しく求めている人はいませんでした．

- 対数を取るときは，底や真数が 0 以下でないか，また底が 1 でないか
- …

ということは当然気にしなければならないことです．こういうことが脊髄反射的にできないとしたら，この講義だけでなく，今までの学習において演習問題への取り組みが不足している証拠です．