幾何入門 演習問題 5（2017 年 5 月 12 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 5x^4 + 4x^3y - 15x^2y^2 + 4xy^3 - y^4 \\ x^4 - 10x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 5y^4 \end{pmatrix}$ と，$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq 1)$ で表される曲線を考える．
   (1) $\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を定義通り計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ をひとつ見つけよ．これを利用して $\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
2. 次の領域 Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ と，$\boldsymbol{l}$ で表される Ω 上の曲線について，$\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (1) $\Omega := \mathbb{R}^2, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 - x \end{pmatrix}, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq 1)$　(2) $\Omega := \mathbb{R}^2, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -\sin x \sin y \\ \cos x \cos y \end{pmatrix}, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}$ $(|t| \leq \pi/4)$
   (3) $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{2\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t - 1 \\ 2t + 1 \end{pmatrix}$ $(|t| \leq 1)$
   (4) $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^4}\begin{pmatrix} y(y^2 - x^2) \\ x(x^2 - y^2) \end{pmatrix}, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq 2)$
3. (1) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を領域とする．$\boldsymbol{l}\colon [a, b] \to \Omega$ が $\boldsymbol{l}(a) = \boldsymbol{l}(b)$ をみたすとき，$\boldsymbol{l}$ が表す曲線を**閉曲線**と呼ぶ．Ω 上の C^∞ 級関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ と閉曲線のパラメータ $\boldsymbol{l}$ に対し，$\displaystyle\int_l \mathrm{grad}(f) \cdot d\boldsymbol{l} = 0$ を示せ．
   (2) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 2y \\ x \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ．
4. (1) $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ を曲線のパラメータとするとき，$\dfrac{d(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m})}{dt}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) \cdot \boldsymbol{m}(t) + \boldsymbol{l}(t) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)$ を示せ．ただし関数 $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m})(t) := \boldsymbol{l}(t) \cdot \boldsymbol{m}(t)$ で定める．
   (2) 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 内の物体 P が，$\boldsymbol{u} \in \Omega$ において力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ を受けて運動しているとする．$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}(f)$ であると仮定し，時刻 t における P の位置を $\boldsymbol{p}(t)$ とおくとき，$E(t) := \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t)\right|^2 + f(\boldsymbol{p}(t))$ を P の**エネルギー**とよぶ．E は時刻 t によらず一定である，つまり $\dfrac{dE}{dt} = 0$ であることを，**運動方程式** $\dfrac{d^2\boldsymbol{p}}{dt^2}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}(t))$ が成立することを使って示せ．これを**エネルギー保存則**とよぶ．（注．エネルギー保存則が運動方程式から数学的に導かれる定理であること，またベクトル場 $\boldsymbol{F}$ のポテンシャルとは位置エネルギーであることがわかる）

（提出の必要はありません）

補足．5/12 の講義でやった補題 34 は，微分積分学の基本定理の二変数版と呼べるものです．少なくとも見た目にはそうですし，証明の中身を見れば，内容としてもそうであることがわかります．微分積分学の基本定理は，今後学ぶ様々な定理も含めて，数学の根幹をなす重要なものです．それと同様の定理が導かれるという意味で，勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}(f)$ は二変数関数の「微分」として正統なものであると考えられます．5/12 の問題 1, 2 のように計算の簡略化に使えるという側面もありますが，これはあくまで副産物です．

5/12 の問題 4 は，力学的な立場から見た勾配ベクトル場の重要性を示します．エネルギー保存則が成り立つかどうかは力学の問題を考える上で非常に重要ですが，それは数学的には，与えられたベクトル場がポテンシャルを持つか否かという問題です．5/12 の講義でやった定理 38 はこの意味で重要です．（力学をやっていない人は，このあたりは気にしなくても構いません）

講義中の板書では曲線のパラメータを ℓ のように書いています．この演習問題のような浄書では l と書いてもエルだと判読できますが，手書きでは ℓ と書かないと，数字の 1 とか I（大文字のアイ）と区別がつかないからです．この講義では $\mathbb{R}^n$ の元はすべてベクトルとみなして可能な限り太字で書くようにしていますが，手書きで ℓ の太字を書くのは難しい上に読みづらくなっていいことがないので，板書では割り切って普通の文字にしています．レポートなどでも，何を表すかがはっきりしていれば，ムリな書き方をすることはありません．大事なのは中身です．

幾何入門 レポート問題 5（2017 年 5 月 12 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下一桁の数を a とおく．例えば 16S1099X なら $a = 9$, 16S1100Z なら $a = 0$.

$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4(a+1)x^3 + 6(a+2)x^2y + 6(a+3)xy^2 + 4(a+4)y^3 \\ 2(a+2)x^3 + 6(a+3)x^2y + 12(a+4)xy^2 + 20(a+5)y^3 \end{pmatrix}$ と，曲線のパラメータ $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_{l} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

ヒント：$\boldsymbol{V}$ のポテンシャルを考える．慌てて a の値を代入しないほうが賢明.

（5/19 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html