幾何入門 レポート問題 5（2017 年 5 月 12 日）コメント

担当：境 圭一

$f(x,y) := (a+1)x^4 + 2(a+2)x^3y + 3(a+3)x^2y^2 + 4(a+4)xy^3 + 5(a+5)y^4 = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} k(a+k)x^{5-k}y^{k-1}$ とおけば $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ ですから，求める値は $f(\boldsymbol{l}(2\pi)) - f(\boldsymbol{l}(0)) = 16(a+1)\pi^4$ です．あとは各自の a の値を代入すれば答が出ます．人により答は違うわけですが，やり方は全く同じであることがわかります．

答案の書き方として「$f = \cdots$ とおくと $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ だから…」のような一文が大切です．単に "$f = \cdots$, $\displaystyle\int_l \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} \overset{(*)}{=} f(\boldsymbol{l}(2\pi)) - f(\boldsymbol{l}(0)) = \cdots$" のように書いてあるだけでは，$(*)$ の等号が成り立つ理由がわかりません．境は講義をやっている身なので，$\boldsymbol{V}$ のポテンシャルを求めているのだということは推測できますが，他の人が読んだ場合は推測できないかもしれません．**書き手は責任をもって自分の主張を過不足なく説明しなければなりません．読み手に判断を委ねるような文章は，一般社会では受け入れてもらえません**[*1]．以下に述べる f を求める過程は書かなくていいところです．天下り的に f を与えてしまえば十分です．書いても差し支えはありませんが，偏微分の記号は $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ などを使ってください．$\dfrac{df}{dx}$ のように書いている人が多いのが気になります．

f の見つけ方は演習でやった通りです．もし $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となるとすれば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(a+1)x^3 + 6(a+2)x^2y + 6(a+3)xy^2 + 4(a+4)y^3,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(a+2)x^3 + 6(a+3)x^2y + 12(a+4)xy^2 + 20(a+5)y^3$$

でなければならず，それぞれ x, y の関数だと思って積分すれば

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (a+1)x^4 + 2(a+2)x^3y + 3(a+3)x^2y^2 + 4(a+4)xy^3 + C_1(y) \\ &= C_2(x) + 2(a+2)x^3y + 3(a+3)x^2y^2 + 4(a+4)xy^3 + 5(a+5)y^4 \end{aligned}$$

の形しかありえないことになります．例えば $C_1(y) = 5(a+5)y^4$, $C_2(x) = (a+1)x^4$ とおけば両方の式がみたされるので，このときの f が $\boldsymbol{V}$ のポテンシャルの候補です．この f に対して実際に $\mathrm{grad}(f)$ を計算すれば，確かに $\boldsymbol{V}$ に一致することが確かめられます．

もし，$\boldsymbol{V}$ のポテンシャルを**全て**求めよ，と言われたなら

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{5} k(a+k)x^{5-k}y^{k-1} + c \quad \text{（ただし } c \text{ は定数）}$$

と書くのが正解でしょう．上で与えた f は $c = 0$ の場合です．定数 c を決める方法はありません（他に条件が与えられていなければ）．定数 c を変えると，$z = f(x,y)$ のグラフ全体が z 方向にずれることになりますが，高さが変わってもグラフの勾配は変わりませんから $\mathrm{grad}(f)$ は不変です．

[*1] 文学作品は別かもしれない