幾何入門 演習問題 6（2017 年 5 月 19 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1,\ y = \pm 1\} \cup \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 1,\ |y| \le 1\}$ とおく．
   (1) L を図示せよ．また L が囲む有界領域 Ω を図示せよ．
   (2) L を表すパラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，周期的，区分的に正則であり，$\partial\Omega$ の境界の向きを表すものを一つ求めよ．（ヒント：4 つに区切って場合分けして定義するとよい）さらに，その周期を求めよ．
   (3) (2) で定めたパラメータに対し，$\boldsymbol{l}(t) \in L$ における法ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ を求めよ．
   (4) $\mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
2. 次の領域 Ω とベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，境界 $L := \partial\Omega$ の向きを表す周期的な正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ を一つ求め，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (1) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < 1\},\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x+y \\ -y \end{pmatrix}$　　(2) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + y^2 < 1\},\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x + 2xy \\ x - y^2 \end{pmatrix}$
   (3) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < |\boldsymbol{u}| < 2\},\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$（問題 4 も参照せよ）
3. L を正則な曲線とし，$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ を L を表す正則パラメータ，$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ に対応する法ベクトルを $\boldsymbol{n}_l, \boldsymbol{n}_m$ とする．
   (1) $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ が L に同じ向きを定めるとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_l\, d\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_m\, d\boldsymbol{m}$ を示せ．（教科書 p. 31 の補題 1.44 参照）
   (2) $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ が L に逆の向きを定めるとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_l\, d\boldsymbol{l}$ と $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_m\, d\boldsymbol{m}$ を比べよ．
4. $r > 0$ に対し，$L_r := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le r,\ y = \pm r\} \cup \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm r,\ |y| \le r\}$ とおく．問題 1 の L は L_1 である．
   (1) L_1 と L_2 に囲まれる有界領域 Ω' を図示せよ．
   (2) $\partial\Omega'$ の向きを表すような，周期的，区分的に正則な L_1, L_2 のパラメータ $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ を一つ求めよ．
   (3) $\boldsymbol{l}_1$ と問題 1. (2) のパラメータは L_1 に同じ向きを定めるか？
   (4) Ω' の補集合 $\mathbb{R}^2 - \Omega' := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{u} \notin \Omega'\}$（講義では $(\Omega')^c$ と書いた）は有界領域ではないことを示せ．
5. 曲線 L の正則パラメータ $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ について，この二つが同じ向きを表すとき，$\boldsymbol{l}_1 \approx \boldsymbol{l}_2$ と書くことにする．$\approx$ は**同値関係**であることを示せ．すなわち，以下のことを示せ：
   (i) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{l}$　　(ii) $\boldsymbol{l}_1 \approx \boldsymbol{l}_2$ ならば $\boldsymbol{l}_2 \approx \boldsymbol{l}_1$　　(iii) $\boldsymbol{l}_1 \approx \boldsymbol{l}_2$ かつ $\boldsymbol{l}_2 \approx \boldsymbol{l}_3$ ならば $\boldsymbol{l}_1 \approx \boldsymbol{l}_3$
6. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を，正則な閉曲線 $L_1, \dots, L_k$ で囲まれた有界領域とする．境界 $\partial\Omega = L_1 \cup \cdots \cup L_k$ の向きは，法ベクトルが Ω^c に向かうような向きとする，と約束した．ところで，そもそも「Ω^c に向かう」とは（直感的には明らかだろうが）厳密にはどのように定義したらよいか？

（提出の必要はありません）

補足．講義で与えた線積分（その 2）の定義 44 が，教科書の定義 1.43 と同一のものであることを説明しておきます．一般に正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ に対し，法ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ の長さは $|\hat{\boldsymbol{n}}(t)| = \left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right| \cdots (*)$ で，これは t に依存して変化しますが，0 にはなりません（$\boldsymbol{l}$ が正則だから）．よって $\boldsymbol{n}(t) := |\hat{\boldsymbol{n}}(t)|^{-1}\,\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ というベクトルが定義され（分母が 0 にならない），$\boldsymbol{n}(t)$ は法ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ と同じ向きのベクトルで，t によらず $|\boldsymbol{n}(t)| = 1$ です．この $\boldsymbol{n}$ が教科書 28 ページの**単位法ベクトル**です．「単位」というのは長さが 1 であることを指します．$\boldsymbol{n}$ の定義と $(*)$ より $\hat{\boldsymbol{n}}(t) = |\hat{\boldsymbol{n}}(t)|\,\boldsymbol{n}(t) = \left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right| \boldsymbol{n}(t)$ ですから，線積分（その 2）は $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(t)\, dt = \int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right| \boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \boldsymbol{n}(t)\, dt$ とも書けます．これは教科書の定義 1.43 に一致します．具体的に計算してみるとわかりますが，後者だと $\left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|$ で割って $\boldsymbol{n}(t)$ を求めたあと，もう一度 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|$ をかけることになって二度手間なので，講義では前者を採用しました．

補足． $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ を接ベクトルと呼ぶことについて，講義で話す時間がないので，ここで補足しておきます．

正則パラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で表される曲線 $L = \boldsymbol{l}(\mathbb{R})$ を考えます．

定義． $\boldsymbol{l}(a) \in L$ における L の**接線**を

$$\boldsymbol{l}(a) \text{ を通り } \frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(a) \text{ に平行な直線} \tag{$*$}$$

と定義する．

講義で述べたように，どんなパラメータを取っても，$p \in L$ における接ベクトルはすべて平行です．よって p における接線は L と p だけで決まります．

今までは「接線」と言えば

$$y = f(x) \text{ のグラフの } (a, f(a)) \text{ における接線の式は } y = f'(a)(x-a) + f(a) \text{ である} \tag{$**$}$$

という形で出てきていたと思います．$(*)$ と $(**)$ は，次に見るように同一のものです．

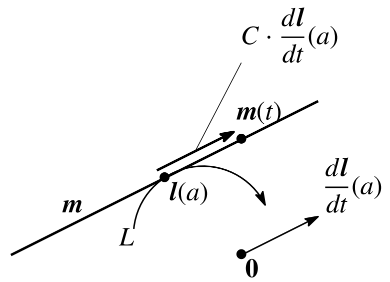
(1) まず，L が一変数 C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフである場合を考えます．このとき $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

とおくと $\boldsymbol{l}$ は L を表し，$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ なので L の正則パラメータです．

$(*)$ をみたす直線は

$$\boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{m}(t) := \boldsymbol{l}(a) + (t-a)\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(a)$$



で表せます（右図で $C = t - a$ とおいた）．成分を計算してみると

$$\boldsymbol{m}(t) = \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} + (t-a)\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ f'(a)(t-a) + f(a) \end{pmatrix}$$

ですから，$\boldsymbol{m}$ は直線 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ を表します．これは $(**)$ と一致します．

少なくとも L が $y = f(x)$ のグラフである場合，$(*)$ は今までよく知っていた $(**)$ の意味での「接線」に一致することがわかりました．従って $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ は $(**)$ の意味での「接線」に平行なので，$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ を「接ベクトル」と呼ぶのは自然だと思えます．

(2) 一般の正則パラメータ $\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ で表される曲線 L の場合，正則性から $l_1'(a) \neq 0$ または $l_2'(a) \neq 0$ の少なくとも一方が成り立ちます．例えば $l_2'(a) \neq 0$ の場合，**逆関数定理**により，$l_2(a)$ の近くだけで定義される l_2 の逆関数 h が存在します．h は逆関数ですから $l_2(h(s)) = s$ をみたします．$\widetilde{\boldsymbol{l}} := \boldsymbol{l} \circ h$ も（$\boldsymbol{l}(a)$ 付近では）L を表します．$g := l_1 \circ h$ とおくと

$$\widetilde{\boldsymbol{l}}(s) = \boldsymbol{l}(h(s)) = \begin{pmatrix} l_1(h(s)) \\ l_2(h(s)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(s) \\ s \end{pmatrix}$$

ですから，L は $\boldsymbol{l}(a)$ の近くでは，ある関数 $x = g(y)$ のグラフであることがわかります．(1) と同様に，$\boldsymbol{l}(a)$ における $(*)$ の意味での接線は，$(**)$ の意味での g のグラフの「接線」に一致することがわかります．

なお，接線の式 $(**)$ を $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ と書けば，これは f の Taylor 級数の 1 次の項までを取ったものであることに気づきます．関数を多項式で近似するのが Taylor 級数ですが，1 次式による近似を接線と呼ぶわけです．

幾何入門 レポート問題 6（2017 年 5 月 19 日）

担当：境 圭一

円 $x^2 + y^2 = 1$ の第一象限部分と x 軸，y 軸で囲まれる有界領域を Ω とする．$\partial\Omega$ を表す区分的に正則な周期的パラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，Ω の境界の向きを表すもの一つ求めよ．この $\boldsymbol{l}$ を用いて，ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{u}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．（**本質的でないヒント**：円の部分を $\boldsymbol{l}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pm\pi t/2) \\ \sin(\pm\pi t/2) \end{pmatrix}$ で表すと簡潔に記述できるかもしれない．Ω の境界の向きを与えるには，$\pm$ はどちらが正しいか考えよ．）

（5/26 の 3 限開始時までに提出してください）

```
http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html
```