幾何入門 演習問題 7（2017 年 5 月 26 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ領域や曲線はすべて $\mathbb{R}^2$ 内のものとし，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ と C^∞ 級関数 f を考える．ベクトル場 $\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W}\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ と $f\boldsymbol{V}\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ をそれぞれ $(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{u})$, $(f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u})$ で定義する．次の等式が成り立つことを示せ．
   (1) $\mathrm{div}(a\boldsymbol{V}+b\boldsymbol{W}) = a\,\mathrm{div}\boldsymbol{V} + b\,\mathrm{div}\boldsymbol{W}$, $\mathrm{rot}(a\boldsymbol{V}+b\boldsymbol{W}) = a\,\mathrm{rot}\boldsymbol{V} + b\,\mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ （ただし $a, b \in \mathbb{R}$ は定数）
   (2) $\mathrm{div}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f)\cdot\boldsymbol{V} + f\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}$,
   (3) $\mathrm{rot}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f)\cdot\widetilde{\boldsymbol{V}} + f\,\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$, ただし $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ とするとき，$\widetilde{\boldsymbol{V}} := \begin{pmatrix} V_2 \\ -V_1 \end{pmatrix}$
   (4) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ （注：このことから「$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} \neq 0 \implies \boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ をみたす f は存在しない $\cdots$ $(*)$」がわかる）
   (5) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ （注：$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ を **Laplace 方程式**，その解 f を**調和関数** (harmonic function) と呼ぶ）
2. (1) 領域 $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ を考える．$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}\colon [0,\pi] \to \Omega$ を，それぞれ $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ で定義する．$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ に沿った線積分を考えることにより，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ．（問題 1. (4) $(*)$ の逆の反例になっている）
3. (1) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (x/2)^2 + (y/3)^2 < 1\}$ とおく．$\partial\Omega$ の向きを表す周期的正則パラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を一つ求めよ．
   (2) $\boldsymbol{V}$ を問題 2 のベクトル場とする．$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ の計算を試みよ．
   (3) $0 < \epsilon < 2$ とする．$M := \{\boldsymbol{u} \in \Omega \mid |\boldsymbol{u}| = \epsilon\}$ とし，$\partial\Omega$ と M で囲まれた有界領域を Ω' とおく．Ω' の境界としての M の向きを表す周期的正則パラメータ $\boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \Omega$ を一つ求めよ．
   (4) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m}$ を求めよ．Ω' に Green の定理を適用して，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．
4. 曲線の正則パラメータ $\boldsymbol{l}\colon [a,b] \to \Omega$ に対し，$\boldsymbol{u}(t) := \left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|^{-2} \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$, $\boldsymbol{v}(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t)$ とおく．
   (1) 各 $t \in [a,b]$ に対し，$\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)$ は一次独立であることを示せ．（ヒント：$a\boldsymbol{u}(t) + b\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{0}$ と仮定し，両辺と $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ の内積を取る．$\boldsymbol{u}(t) \perp \boldsymbol{v}(t)$ を使う）
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ に対し，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) = \left(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))\cdot\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right)\boldsymbol{u}(t) + \left(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))\cdot\boldsymbol{n}(t)\left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|\right)\boldsymbol{v}(t)$ を示せ．このことから，線積分（その 1・その 2）とは，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))$ を接線方向 $\boldsymbol{u}(t)$, 法線方向 $\boldsymbol{v}(t)$ に分解したときの各成分の係数を積分したものであることがわかる．
5. （教科書 p. 51 参照：「関数論」で当該箇所を学んだ後に考えてみてください）
   $z \in \mathbb{C}$ と関数 $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を実部と虚部に分け，$z = x + \sqrt{-1}\,y$, $h(z) = f(x,y) + \sqrt{-1}\,g(x,y)$ と書く．
   (1) $\boldsymbol{V} := \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{W} := \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$ とおくとき，「h が正則関数 $\iff \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 0$」を示せ．
   (2) 曲線 $\boldsymbol{l}\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} h(z)\,dz = \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} + \sqrt{-1}\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{l}$ を示せ．

（提出の必要はありません）

補足．講義で述べたように，Gauss の発散定理は，ベクトル場に対する微分積分学の基本定理の類似とみなすことができます．この意味で，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ や $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$, 線積分は，ベクトル場の「微分・積分」として正当なものと言えます．

5/26 の問題 2 で，問題 1. (4) の $(*)$ の逆が成り立たない，ということを見ました．問題 2 ではベクトル場の分母が 0 になるのを避けるため，領域として $\mathbb{R}^2$ から $\boldsymbol{0}$ を取り除いたものを考えました．実は，このように領域に「穴を空けた」ことが，$(*)$ の逆が成り立たなかった原因です．「穴が空いていない」領域を**単連結領域**とよびますが，実は単連結領域においては $(*)$ の逆が成立します．これらの事実は線積分を使って示すことができ，線積分により領域の幾何学的な特徴を抽出できることを意味します．詳細はこの講義の最終回で述べる予定です．

幾何入門 レポート問題 **7**（**2017** 年 **5** 月 **26** 日）

担当：境 圭一

$L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ と x 軸，y 軸で囲まれる有界領域を Ω とし，$\partial\Omega$ の向きを表すパラメータ $\boldsymbol{l}$ を取る．Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^3 + x^2y - 3xy^2 \\ -3x^2y + xy^2 + y^3 \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．（ヒント：Gauss の発散定理を使う）

（6/2 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html