幾何入門 演習問題 8（2017 年 6 月 2 日）

担当：境 圭一

※今回からスペースの都合でベクトルを横に書きますが，もちろん縦でも構いません．

1. (1) $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とし，$V_\pm \subset S^2$ を
$$V_+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid -1 < z\}, \quad V_- := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z < 1\}.$$
で定義する．$V_+ \cup V_- = S^2$ を示せ．
   (2) $\boldsymbol{\varphi}_+ \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義する．$\boldsymbol{a} = (s,t) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{R}^3$ の点 $(s,t,0)$ と $(0,0,-1) \in S^2$ を結ぶ直線が V_+ と交わる点を $\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a})$ と定める．$\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a})$ を s,t の式で表し，すべての $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し $\boldsymbol{\varphi}_+(\boldsymbol{a}) \in V_+$ であることを示せ．従って $\boldsymbol{\varphi}_+ \colon \mathbb{R}^2 \to V_+$ とみなせる．
   (3) $\boldsymbol{\varphi}_+ \colon \mathbb{R}^2 \to V_+$ は全単射であることを示せ．また，Jacobi 行列 $D\boldsymbol{\varphi}_+ = \begin{pmatrix} \partial_s \boldsymbol{\varphi}_+ & \partial_t \boldsymbol{\varphi}_+ \end{pmatrix}$ の階数は，任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ において 2 であることを示せ．これにより，$\boldsymbol{\varphi}_+$ は V_+ の各点の近くでの S^2 の局所座標になることがわかる．
   (4) $\boldsymbol{a} = (s,t) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{R}^3$ の点 $(s,t,0)$ と $(0,0,1) \in S^2$ を結ぶ直線が V_- と交わる点を $\boldsymbol{\varphi}_-(\boldsymbol{a})$ と定める．(2), (3) と同様にして，$\boldsymbol{\varphi}_- \colon \mathbb{R}^2 \to V_-$ は V_- の各点の近くでの S^2 の局所座標になることを示せ．
   (5) $\boldsymbol{\varphi}_\pm$ の逆写像 $\boldsymbol{\varphi}_\pm^{-1} \colon V_\pm \to \mathbb{R}^2$ を具体的な式で表せ．
   注． この $\boldsymbol{\varphi}_\pm$ あるいは逆写像 $\boldsymbol{\varphi}_\pm^{-1}$ を**立体射影** (stereographic projection) とよぶ．
2. (1) S^2 上の任意の点は $(\cos\alpha\cos\beta,\ \sin\alpha\cos\beta,\ \sin\beta)$ $(0 \le \alpha \le 2\pi, -\dfrac{\pi}{2} \le \beta \le \dfrac{\pi}{2})$ の形に表せることを示せ．（ヒント：$\mathbb{R}^3$ の極座標）
   S^2 の部分集合
$$A := \{(x,0,z) \in S^2 \mid x \ge 0\}, \quad B := \{(x,y,0) \in S^2 \mid x < 0\}$$
を考え，$V := S^2 - A, W := S^2 - B$ とおく．
   (2) $U := (0,2\pi) \times \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) := \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \alpha < 2\pi, -\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ とおく．$\boldsymbol{\varphi} \colon U \to V$ を $\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\beta) := (\cos\alpha\cos\beta,\ \sin\alpha\cos\beta,\ \sin\beta)$ で定義すると，$\boldsymbol{\varphi}$ は V の各点近くでの S^2 の局所座標になることを示せ．
   (3) $\boldsymbol{\psi} \colon U \to W$ を $\boldsymbol{\psi}(\alpha,\beta) := (\sin\alpha\cos\beta,\ \sin\beta,\ -\cos\alpha\cos\beta)$ で定義すると，$\boldsymbol{\psi}$ は W の各点の近くでの S^2 の局所座標になることを示せ．
3. (1) $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^3\}$ とおく．S を図示せよ．
   (2) $\boldsymbol{0} \in S$ の近くで S の局所座標を取れないことを示せ．従って S は曲面ではない．（ヒント：$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{a} \in U$ に対し $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ または $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ であることを示す）
4. (1) $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2}\}$ とおく．S を図示せよ．（ヒント：問題 7 の円柱座標を使う）
   (2) S は曲面ではないことを示せ．（ヒント：$\boldsymbol{0} \in S$ の近くで局所座標を取れないことを前問と同様に示す）
   (3) $S \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ は曲面であることを示せ．
5. $S \subset \mathbb{R}^3$ の各点 $p \in S$ の近くで S の局所座標を取れるとき，S の座標系が存在することを示せ．
6. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を一次独立なベクトルとするとき，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ であることを示せ．また $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ は $\mathbb{R}^3$ の基底をなすことを示せ．（第 1 回目にやりましたが，次回以降使うので再掲しました）
7. $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ に対し $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$（ただし $0 \le \theta < 2\pi, r \ge 0$ とする）とおくとき，(r,θ,z) を**円柱座標**とよぶ．
   (1) 円柱座標で一意的に表せない $\mathbb{R}^3$ の点を全て求めよ．
   (2) 球面 S^2 を円柱座標で表せ．
   (3) 円柱座標で $r = 1$ で表される図形 A を図示せよ．また A を xyz 座標で表せ．
   (4) 円柱座標で $(r-2)^2 + z^2 = 1$ で表される図形 T を図示せよ．また T を xyz 座標で表せ．

（提出の必要はありません）

補足：曲面の局所座標について．

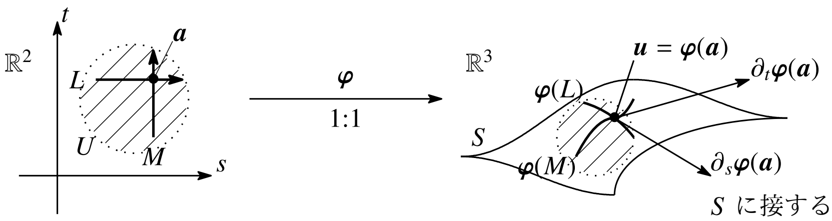
曲面の定義，すなわち，任意の $\boldsymbol{u} \in S$ のまわりで取れる局所座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ の意味はわかりにくいと思います．いろいろ言い換えるうちに意味がつかめてくる，ということもあると思うので，少し補足してみます．

$\boldsymbol{u} \in S$ とします．S が曲面であることから，$\boldsymbol{u}$ のまわりの局所座標が取れます．その定義に出てくる ϵ と $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ の性質 (i), (ii) は次のようなことを意味します（あくまで気分であり，数学的に厳密ではありません）:

(i) $\boldsymbol{\varphi}(U) \subset S$ であり，S 上で $\boldsymbol{u}$ に近い点は全て $\boldsymbol{\varphi}(U)$ に含まれる（二年生後期の「位相空間論」では「$\boldsymbol{\varphi}(U)$ は S における $\boldsymbol{u}$ の近傍である」という言い方をします）

(ii) $\boldsymbol{\varphi}$ を通して $U \subset \mathbb{R}^2$ と $\boldsymbol{\varphi}(U)$ $(\subset S \subset \mathbb{R}^3)$ は同一視される（位相空間論では「U と $\boldsymbol{\varphi}(U)$ は同相」といいます）

(i), (ii) より，$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u}$ となる $\boldsymbol{a} \in U$ が**唯一つ**存在します．$U \subset \mathbb{R}^2$ ですから，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のように，$\boldsymbol{a}$ の位置は 2 つの実数の組（座標）により確定します．(ii) により U と $\boldsymbol{\varphi}(U)$ は同一視されるので，$\boldsymbol{u}$ の $\varphi(U)$ 上での位置も，2 つの実数の組 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ で確定していると言えます．同じように，S 上で $\boldsymbol{u}$ に近い点 $\boldsymbol{v}$ $(\in \boldsymbol{\varphi}(U))$ に対しても，$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{v}$ となる $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in U$ が**唯一つ**存在し，$\boldsymbol{v}$ の $\varphi(u)$ 上の位置は座標 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ で確定していると言えます．このように，S が曲面であるとき，任意の $\boldsymbol{u} \in S$ の近くで，平面と同じような「座標」が $\boldsymbol{\varphi}$ を通して定まることになります．ただし，この「座標」を S 全体で定めるのは一般には無理で，考えている点 $\boldsymbol{u}$ を含む S の（十分小さい）部分集合上でのみ可能なことです．



上の $\boldsymbol{a}$ を通る，U 上の二つの直線

$$L := \{(x, a_2) \in U\}, \quad M := \{(a_1, y) \in U\}$$

を考えます．L, M はそれぞれ x 軸，y 軸に平行な直線です．$\boldsymbol{\varphi}$ により，L, M は $\boldsymbol{\varphi}(U)$ $(\subset S)$ 上の曲線 $\boldsymbol{\varphi}(L), \boldsymbol{\varphi}(M)$ にうつされます．これらは曲がってはいますが（S が曲がっているから），もとの L, M は U の座標軸に平行で，U は $\boldsymbol{\varphi}(U)$ と同一視されるのでしたから，$\boldsymbol{\varphi}(L), \boldsymbol{\varphi}(M)$ も「座標軸」のようになっているものと期待されます．局所座標の条件 (iii) はこのことに関係します：

簡単のため $\boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおき，L, M のパラメータ

$$\boldsymbol{l}(t) := \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{m}(t) := \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_2$$

を選んでおきます．$\boldsymbol{l}(0) = \boldsymbol{m}(0) = \boldsymbol{a}$ です．このとき

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(\boldsymbol{a}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\Big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a} + \epsilon \boldsymbol{e}_1) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})\Big) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\Big((\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{l})(\epsilon) - (\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{l})(0)\Big)$$

と書けますから，$\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(\boldsymbol{a})$ は S 内の曲線 $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{l}$ の（つまり，$\boldsymbol{\varphi}(L)$ の）$\boldsymbol{u}$ における接ベクトルであることがわかります．同様に $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{a})$ は $\boldsymbol{u}$ における $\boldsymbol{\varphi}(M)$ の接ベクトルです．局所座標の条件 (iii) より，これらは一次独立です．これは，$\boldsymbol{\varphi}(L)$ と $\boldsymbol{\varphi}(M)$ の接ベクトルが $\boldsymbol{u}$ において平行にはなっていないこと，つまり「座標軸」$\boldsymbol{\varphi}(L), \boldsymbol{\varphi}(M)$ が接したりせず，「横断的に」交わることを意味します（直交はしていないかもしれません）．もし $\boldsymbol{\varphi}(L)$ と $\boldsymbol{\varphi}(M)$ が $\boldsymbol{u}$ において接していると，$\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上の「座標軸」だと言うのは無理がありますが，条件 (iii) により，その心配はないことになります．

幾何入門 レポート問題 8（2017 年 6 月 2 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下一桁の数を a とおく．例えば 16S1077X なら $a = 7$, 16S1088Y なら $a = 8$.
$S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とし，S^2 の部分集合 $U := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > (2a - 9)/10\}$ を考える．6/2 の演習問題 1. の $\boldsymbol{\varphi}_+ \colon \mathbb{R}^2 \to V_+$ について，$\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2$ を図示せよ．

（6/16 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html