幾何入門 レポート 8（2017 年 6 月 2 日）コメント

担当：境 圭一

$(x,y,z)\in U$, $\boldsymbol{\varphi}_+^{-1}(x,y,z)=(s,t)$ とおき，(s,t) が動く範囲を求めます．$\boldsymbol{\varphi}_+(s,t)=(x,y,z)$ ですから，演習でやった通り

$$x=\frac{2s}{1+s^2+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+s^2+t^2},\quad z=\frac{1-s^2-t^2}{1+s^2+t^2}$$

です．$(x,y,z)\in U$ ですから $z>\dfrac{2a-9}{10}$, よって

$$\frac{1-s^2-t^2}{1+s^2+t^2}>\frac{2a-9}{10}\quad つまり\quad s^2+t^2<\frac{19-2a}{2a+1}$$

です（$1+s^2+t^2>0$ と $2a+1>0$ に注意）．$19-2a>0$ なので，これは $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^2$ を中心とする半径 $\sqrt{\dfrac{19-2a}{2a+1}}$ の円の内部（境界を含まない）を表します．

$s=\dfrac{x}{1+z}$, $t=\dfrac{y}{1+z}$ であることから

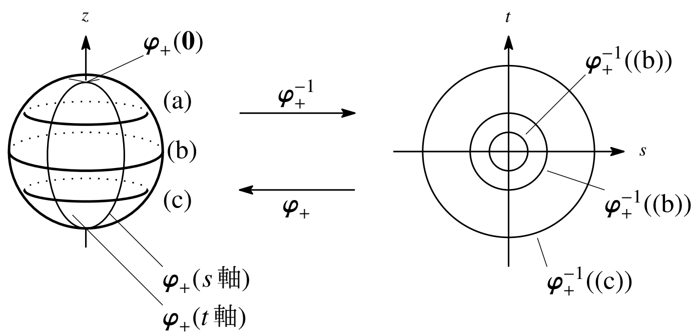
$$s^2+t^2=\frac{x^2+y^2}{(1+z)^2}<(x^2+y^2)\cdot\frac{10}{2a+1}<\cdots$$

のような評価が多かったのですが，x^2+y^2 と $1+z$ は独立ではありませんから，この方法だと一般には誤る可能性があります（この問題の場合はたまたま大丈夫）．正しくは

$$\frac{x^2+y^2}{(1+z)^2}=\frac{1-z^2}{(1+z)^2}=\frac{1-z}{1+z}=\frac{2}{1+z}-1$$

と変形し，一度に評価すべきです．

$\dfrac{19-2a}{2a+1}=\dfrac{20}{2a+1}-1$ と変形すると，この半径は a に関し単調減少であることがわかります．このことから，$\boldsymbol{\varphi}_+^{\pm1}$ により $\mathbb{R}^2$ と V_+ がうつりあう様子はだいたい次の図のようになります：



S^2 から $(0,0,-1)$ を取り除いて穴をあけ，そこからミカンの皮をむくように V_+ を $\mathbb{R}^2$ に広げているわけですが，イメージがわきますか？

(6/16)