幾何入門 演習問題 9（2017 年 6 月 16 日）

担当：境 圭一

1. 次の三変数 C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ を全て求めよ．$S := f^{-1}(0)$ とおくとき，$S \neq \emptyset$, かつ S 上で $\mathrm{grad}(f) \neq \boldsymbol{0}$ となるような（従って，S が曲面を表すような）定数 k の範囲を求めよ．そのときの S を図示せよ．また，それ以外の k に対しては，S はどのような図形になるか？
   (1) $f(x,y,z) := x^2 + y^2 - k$ (2) $f(x,y,z) := \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - k$（ただし $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ は k と無関係な定数）
   (3) $f(x,y,z) := (x^2 + y^2 + z^2 + k)^2 - 16(x^2 + y^2)$ (4) $f(x,y,z) := xy + z^2 - k$
   (5) $f(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + kz^2 + 4zx + 1$ (6) $f(x,y,z) := (x^2 + y^2 + z^2 - k)^2$
2. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし，$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ とする．$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, $|\boldsymbol{v}| = 1$ に対し，$\boldsymbol{u}$ における f の $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分**を
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\boldsymbol{u} + \epsilon \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{u})}{\epsilon} \quad \cdots \quad (*)$$
   で定義する．$(*) = \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ であることと，$(*)$ を最大にする $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) / \left|\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})\right|$ であることを示せ（ヒント：講義の補題 10 と同様）．一般に，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について同様のことを考察せよ．
3. 円柱座標 (r, θ, z) のもとで $T := \{(r, \theta, z) \mid (r-2)^2 + z^2 = 1\}$ と表されるトーラスを考える．$S^1 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ 上の点 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ を $[\alpha]$ で表すことにする（従って，S^1 の点としては $[\alpha + 2\pi] = [\alpha]$ である）．$F\colon S^1 \times S^1 \to T$ を
$$F([\alpha], [\beta]) := (2 + \cos\alpha,\ \beta,\ \sin\alpha) \quad \text{（右辺は円柱座標）}$$
   で定義すると F は well-defined な全単射であることを示せ．
4. 円柱座標 (r, θ, z) のもとで $r = 2 + t\cos(\theta/2)$, $z = t\sin(\theta/2)$ ($|t| \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$) で表される図形 M は**メビウスの帯** (Möbius band) であることを確かめよ．
5. $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qyz + 2rzx$（ただし a, b, c, p, q, r は定数で，少なくとも一つは 0 でない）の形の関数を**二次形式** (quadratic form) という．$S := f^{-1}(1) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 1\}$ が $\emptyset$ でない曲面を表すための条件を求めよ．（ヒント：$A := \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$ とおくと A は対称行列で，$f(x,y,z) = (x\ y\ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ である．A は直交行列で対角化できる．答は A の固有値を使って表現できる）
6. $S \subset \mathbb{R}^3$ を曲面とし，$\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ を $\boldsymbol{u}_0 \in S$ の近くの局所座標とする．
   (1) $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to \boldsymbol{\varphi}(U)$ とみると，$\boldsymbol{\varphi}$ は全単射であることを示せ．
   (2) $\mathbb{R}^2$ の開集合 $V \subset U$ で $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{\varphi}(V)$ となるものに対し，（必要なら $\epsilon > 0$ を小さく取り直せば）$\boldsymbol{\varphi}|_V\colon V \to S$ も p の近くの局所座標になることを示せ．
   (3) 開集合 $W \subset \mathbb{R}^2$ と，C^∞ 級の全単射 $\boldsymbol{\psi}\colon W \to U$ で Jacobi 行列が W の各点で正則であるものが存在すると仮定する．$\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi}\colon W \to S$ も $\boldsymbol{u}_0$ の近くの局所座標になることを示せ．
   (4) 曲面の定義における局所座標として，いつでも $D^\circ \to S$ の形のものを取れることを示せ．ただし $D^\circ := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| < 1\}$ である．（ヒント：開集合 U に含まれる点は全て内点であることに注意し (2), (3) を使う）
   (5) 曲面の定義における局所座標として，いつでも $\mathbb{R}^2 \to S$ の形のものを取れることを示せ．（ヒント：(3) のような $\boldsymbol{\psi}$ を $U = D^\circ$ と $W = \mathbb{R}^2$ に対し構成し (4) を使う）

（提出の必要はありません）

補足．講義の定理 58 によれば，$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ と $k \in \mathbb{R}$ について，$S := f^{-1}(k) \neq \emptyset$ かつ S 上で $\mathrm{grad}(f) \neq \boldsymbol{0}$ である（つまり，**全ての** $\boldsymbol{u} \in S$ に対し $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{0}$ である）とき，S は曲面です．**この定理の逆は成り立ちません**．つまり，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in S$ があったとしても，**S が曲面になるかどうかは，別途調べてみないとわかりません**．例えば 6/16 の問題 1. (6) はその例で，実は S 上いたるところ $\mathrm{grad}(f) = \boldsymbol{0}$ ですが，$k > 0$ なら S は曲面になります．

抽象的な理論も大切ですが，具体的な曲面（球面，トーラス，双曲面，…）を大事にしてください．具体例を扱うと実際に幾何をやっている気分になりますし，抽象的理論にちゃんと意味があることの確認にもなります．

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html`

幾何入門 レポート問題 **9**（**2017** 年 **6** 月 **16** 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下一桁の数を a とおく．例えば 16S1055P なら $a = 5$, 16S1066Q なら $a = 6$.
$f(x, y, z) := x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 2x + 8y - 18z + 25$ とする．$S := f^{-1}(2a)$ は曲面となるか，理由とともに述べよ．
（ヒント：$f(x, y, z) = 2a$ となる (x, y, z) が一組でも見つかれば $S \neq \emptyset$ がわかる）

（6/23 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html