

$f(x, y, z) = (x-1)^2 - 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 + 5$  であることから,  $f(x, y, z) = 2a$  となる  $(x, y, z)$  は常に見つかります. 例えば  $a = 0$  の人は  $x = 1, y = 2 + \sqrt{5/2}, z = 3$  が一つの例で,  $a = 9$  の人は  $x = 1 + \sqrt{13}, y = 2, z = 3$  が一つの例です. もちろん他にもたくさんあります. いずれにせよ  $S = f^{-1}(2a) \neq \emptyset$  です.

$\text{grad}(f) = 2(x-1, -2(y-2), 3(z-3))$  ですから,  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  となり得る  $\mathbf{u}$  は  $(1, 2, 3)$  のみです. 一方  $f(1, 2, 3) = 5$  は奇数ですから,  $a = 0, \dots, 9$  のいずれについても  $f(1, 2, 3) = 2a$  となることはありません. 従って  $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$  は  $S$  上の点ではありません. つまり  $S$  上で常に  $\text{grad}(f) \neq \mathbf{0}$  ですから,  $S$  は ( $a$  の値によらず) 曲面です.

“ $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$  のとき  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ ” と書いた人が多いのですが, これだと  $(1, 2, 3)$  以外の点については何も言っていないことになります. 正しくは

“ $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  とすると  $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ ” もしくは “ $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$  のときのみ  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ ”

と書くべきです.

誤った記述の例として, 例えば “ $\text{grad}(f)(2a)$ ” というのがありました.  $\text{grad}(f): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ですから,  $\text{grad}(f)$  に代入するのは  $\mathbb{R}^3$  の点のはずです. また

(誤り) “ $S = f^{-1}(2a) = (x-1)^2 - 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 + 5 = 2a$ ”

のような記述もありました.  $S$  は集合ですから, それが多項式と等号で結ばれるのは変です. 正しくは

(正しい)  $S = f^{-1}(2a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 - 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 + 5 = 2a\}$ ,

また

(許容範囲)  $S = f^{-1}(2a) = \{(x-1)^2 - 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 + 5 = 2a\}$

も許されると思います. その他に

(好ましくない) “ $S = 0$ ”

という記述もありました. 気持ちはわかりますが,

(正しい)  $S = \emptyset$

と書くべきです. 空集合を表す記号  $\emptyset$  は, 数字のゼロに斜線を引いたもので, ギリシャ文字の  $\phi$  (ファイ) や, ゼロベクトルの  $\mathbf{0}$  (を板書するときの書き方) とは別物です. 言いたいことを正しく伝えるには, 正しい記号を使うことも大切です.

(6/23)

[http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17\\_geometry/17\\_geometry.html](http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html)