幾何入門 演習問題 10（2017 年 6 月 23 日）

担当：境 圭一

1. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) := xy + z^2 - 1$ で定義し，$S := f^{-1}(0)$ とおく．
   (1) $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ を全て求めよ．
   (2) (1) で求めた $\boldsymbol{u}$ は S 上にないことを示せ．このことから S は曲面であることを示せ．
   (3) $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in S$ に対し，$T_{\boldsymbol{u}}S$ と $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ を表す方程式をそれぞれ求めよ．
   (4) $T_{\boldsymbol{u}}S$ を，$\mathbf{0} \in T_{\boldsymbol{u}}S$ が $\boldsymbol{u}$ に移るように平行移動して得られる平面を表す方程式を求めよ．
   (5) S の概形を図示せよ．（ヒント：x, y を $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に変換するとよい）
   (6) 上の (1)〜(5) と同様のことを，以下の関数について考えよ．
      (i) $f(x,y,z) := y^2 + (z-1)^2 - 2$
      (ii) $f(x,y,z) := 2x - 3y + 4z - 5$
      (iii) $f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2 + 1$
      (iv) $f(x,y,z) := x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} - 1$
2. $D^\circ := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2+t^2 < 1\}$ とする．$V_z^+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > 0\}$ 上の点 $\boldsymbol{u}$ の近くの局所座標として，$\boldsymbol{\varphi}\colon D^\circ \to V_z^+$, $\boldsymbol{\varphi}(s,t) := (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2})$ を考える．
   (1) $\partial_s\boldsymbol{\varphi} := \dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}$ などと略記する．$\partial_s\boldsymbol{\varphi}, \partial_t\boldsymbol{\varphi}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in V_z^+$ とする．$\boldsymbol{\varphi}(s,t) = \boldsymbol{u}$ となる $(s,t) \in D^\circ$ を求めよ．
   (3) (1), (2) を使って $T_{\boldsymbol{u}}S^2$ を表す方程式を求めよ．また，$\mathbf{0} \in T_{\boldsymbol{u}}S^2$ が p に移るよう $T_{\boldsymbol{u}}S^2$ を平行移動して得られる平面の方程式を求めよ．
   (4) $\boldsymbol{n}\colon V_z^+ \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{(\partial_s\boldsymbol{\varphi} \times \partial_t\boldsymbol{\varphi})(s,t)}{|(\partial_s\boldsymbol{\varphi} \times \partial_t\boldsymbol{\varphi})(s,t)|}$ で定義する．ただし $\boldsymbol{u} \in V_z^+$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}(s,t) = \boldsymbol{u}$ となる $(s,t) \in D^\circ$ を選んでいる．$\boldsymbol{n}$ は V_z^+ 上の連続な単位法ベクトル場であることを示せ．
   (5) $\boldsymbol{\psi}\colon D^\circ \to V_z^+$ を，$\boldsymbol{\psi}(s,t) := (t, s, \sqrt{1-s^2-t^2})$ で定義し，$\widetilde{\boldsymbol{n}}\colon V_z^+ \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}$ の定義中の $\boldsymbol{\varphi}$ を $\boldsymbol{\psi}$ で置き換えることにより定義する．$\widetilde{\boldsymbol{n}}$ は $\boldsymbol{n}$ と逆の向きを定める，即ち $\widetilde{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{n}$ が成り立つことを示せ．
3. 円柱座標 (r,θ,z) で $\{(r,\theta,z) \mid (r-2)^2 + z^2 = 1\}$ で表されるトーラスを T とおく．$\boldsymbol{\varphi}\colon U := (0,2\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ を，$\mathbb{R}^3$ の xyz 座標で $\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\beta) := ((2+\cos\alpha)\cos\beta,\ (2+\cos\alpha)\sin\beta,\ \sin\alpha)$ で定義する．
   (1) $\boldsymbol{\varphi}(U) \subset T$ であることを示せ．
   (2) $\boldsymbol{\varphi}$ は単射であること，$D\boldsymbol{\varphi}$ は常に階数 2 であることを示せ．
   (3) $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in \varphi(U)$ に対し，$T_{\boldsymbol{u}}T$ と $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}T$ をそれぞれ求めよ．
   (4) $f(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2+3)^3 - 16(x^2+y^2)$ に対し $T = f^{-1}(0)$ であること（6/16 の講義，演習を参照のこと）を用いて，$\boldsymbol{u} \in T$ に対し $T_{\boldsymbol{u}}T$ と $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}T$ をそれぞれ求めよ．
4. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし，$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．f のグラフは向き付け可能な曲面であることを示せ．
5. $\boldsymbol{\varphi}\colon (-1,1) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{\varphi}(t,\theta) := ((2 + t\cos(\theta/2))\cos\theta,\ (2 + t\cos(\theta/2)\sin\theta,\ t\sin(\theta/2))$ で定義し，その像を $M := \boldsymbol{\varphi}((-1,1) \times [0,2\pi])$ とおく．
   (1) M を図示し，M はメビウスの帯であることを確かめよ．
   (2) $U := (-1,1) \times (0,2\pi)$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}\colon U \to M$ は単射で，$D\boldsymbol{\varphi}$ の階数は常に 2 であることを示せ．
   (3) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}(t,\theta)$ ($(t,\theta) \in U$) に対し $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{(\partial_t\boldsymbol{\varphi} \times \partial_\theta\boldsymbol{\varphi})(t,\theta)}{|(\partial_t\boldsymbol{\varphi} \times \partial_\theta\boldsymbol{\varphi})(t,\theta)|}$ とおくと，2. (4), (5) と同様に $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) \in T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}M$ である．$\lim_{\theta\downarrow 0} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(0,\theta))$ と $\lim_{\theta\uparrow 2\pi} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(0,\theta))$ を比べよ．このことから M は向き付け可能ではないことを示せ．

（提出の必要はありません）

補足． 正則曲線 $\boldsymbol{l}$ について，$\boldsymbol{l}(t_0)$ を通り $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t_0)$ に平行な直線のことを**接線**とよびました（演習問題 6 (5/19) の補足参照）．これは，$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t_0)$ ($\neq \mathbf{0}$) を基底とする 1 次元ベクトル空間（を $\boldsymbol{l}(t_0)$ を通るよう平行移動したもの）とも言い換えられます．S を曲面とし，$\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ を $\boldsymbol{u} \in S$ の近くの局所座標とするとき，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}(s,t)$ における接平面は $\partial_s\boldsymbol{\varphi}(s,t)$ と $\partial_t\boldsymbol{\varphi}(s,t)$ を基底とする 2 次元ベクトル空間ですから，接線の「2 次元版」とみなせることがわかります．

幾何入門 レポート問題 10（2017 年 6 月 23 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下二桁の数を 3 で割った余りを a とおく．例えば 16S1066U なら $a = 0$, 16S1077V なら $a = 2$, 16S1088W なら $a = 1$.

$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 - z^2 = 1\}$ は曲面である（証明は不要）．$\boldsymbol{u} = (p, q, r) \in S$ における接平面 $T_{\boldsymbol{u}}S$ が $\boldsymbol{n} := (a, 2, -1)$ と直交するとき，$\boldsymbol{u}$ を求めよ．

（6/30 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html