幾何入門 レポート 12（2017 年 7 月 7 日）コメント

担当：境 圭一

$D^3 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| < 1\}$ とおけば，これは S^2 に囲まれる有界領域です．Gauss の発散定理を使うためにチェックすべきことは

(1) 向きに関して：与えられた向きは D^3 の内側から外側に向かう向きです
(2) $\boldsymbol{V}$ が D^3 上定義されていること：$\boldsymbol{V}$ は $\mathbb{R}^3$ 全体で定義されていますから，D^3 上でも定義されます

これらを確認すれば，Gauss の発散定理から

$$\int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{D^3} \mathrm{div}\boldsymbol{V}\, dxdydz$$

を得ます．もし (1) が逆向きなら右辺にマイナスが必要です．(2) がダメなら，Gauss の発散定理を（そのまま）使うことは諦めなければなりません．これらのチェックを欠かしてはいけません．「いつもこうだから今回も大丈夫だろう」というのが事故の元です．そういった失敗を繰り返して重大な結果を招いている人たちを色々なニュースで見聞きするはずです．皆さんはそうなってはいけません．たかが積分の問題ですが，ここで気を配る習慣をつけなければ，社会へ出てから急に気を配れるようになるはずがありません[*1]．

この問題では $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = z^2 + 2x^2 + 3y^2$ ですが，対称性に注意すれば，D^3 上で $6z^2$ を積分すればよいことがわかります．いろいろ試してみると，円柱座標

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (z \text{ はそのまま})$$

を使うのが簡単であることがわかります．この座標については $dxdydz = rdrd\theta dz$, また積分範囲は $r^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ です．この積分領域を把握できていない答案がたくさんありました．3 次元の極座標でも計算は容易ですが，Jacobian の計算が若干面倒かもしれません．
局所座標を使った計算，例えば上半球面と下半球面に分けて局所座標を取り計算するのはかなり大変です．計算量が多いだけでなく，その座標が向きを保つか否かの確認も必要なので，例えば試験のときは実用的ではありません．具体的な計算は抽象的な議論よりずっと難しく，計算間違いを確実に回避する唯一の方法は，その場に応じた工夫により計算量を減らすことだけです．さぼれるものは可能な限りさぼる，というのが計算問題の鉄則です[*2]．しかし一方で，うまくさぼる方法というのは，泥臭い計算をたくさんやってみないと身につかないものでもあります．

(7/14)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html

[*1] 書いていて耳が痛い
[*2] 日常生活ではそうではない