幾何入門 演習問題 13（2017 年 7 月 14 日）

担当：境 圭一

1. (1) C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対し，$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = \mathbf{0}$ を示せ．
   (2) $\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{V}) = 0$ を示せ．
2. $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ とおく．
   (1) S は境界つき曲面であることを示せ．∂S を求めよ．（例 92 を参照せよ）
   (2) S の向き $\boldsymbol{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{u}$ $(\forall \boldsymbol{u} \in S)$ で定める．$\boldsymbol{n}$ が誘導する ∂S の向きを求めよ．
   (3) (2) の向きについて，$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (-y+z, z+x, z)$ に対し，$\displaystyle\int_{\partial S} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (4) (3) の $\boldsymbol{V}$ に対し $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を求めよ．$D^\circ := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2+t^2 < 1\}$ と $\boldsymbol{\varphi}\colon D^\circ \to S$, $\boldsymbol{\varphi}(s,t) := (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2})$ に対し，$\displaystyle\int_{D^\circ} \mathrm{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s,t))\cdot \hat{\boldsymbol{n}}(s,t)\,dsdt$ を計算し (3) と比較せよ．ただし $\hat{\boldsymbol{n}} := \partial_s\boldsymbol{\varphi} \times \partial_t\boldsymbol{\varphi}$ である．
3. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) := z + x^2 + y^2 - 1$ で定義し，$S := f^{-1}(0) \cap \{z \geq 0\}$ とおく．
   (1) S は境界つき曲面であることを示せ．∂S を求めよ．
   (2) S の向き $\boldsymbol{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})}{\left|\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})\right|}$ で定義する（補題 64 参照）．$\boldsymbol{n}$ が ∂S に誘導する向きを求めよ．
   (3) 前問 (3) の $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
4. 向き付けられた境界つき曲面 $(S,\boldsymbol{n}), (S',\boldsymbol{n}')$ は $\partial S = \partial S'$ をみたし，さらに $\boldsymbol{u} \in \partial S = \partial S'$ に対し $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{n}'(\boldsymbol{u})$ をみたすとする．このとき $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$ であることを示せ．
5. 閉曲面 S と $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$ を示せ．（ヒント：S は境界を持たない）
6. $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1,\ |z| \leq 1\}$ は $\partial S = \partial_+ S \cup \partial_- S$, $\partial_\pm S := \{(x,y,\pm 1) \in S\}$ を境界とするような境界つき曲面であり，$\boldsymbol{n}(1,0,0) = (1,0,0)$ となるような S の向き $\boldsymbol{n}$ が $\partial_\pm S$ に誘導する向きは $\boldsymbol{l}_\pm(t) := (\cos(\mp t), \sin(\mp t), \pm 1)$ で表されることを示せ．
7. Stokes の定理における「コンパクト」（$\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であること）という条件は必要である．ここでは有界性が必要であることを確かめよう．$S := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0\}$ とする．
   (1) S は $\mathbb{R}^3$ の閉集合だが，有界でないことを示せ．
   (2) $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\varphi}(s,t) := (s,t,0)$ は，各 $\boldsymbol{u} \in S$ の近くの局所座標であることを示せ．また $\partial S = \{(x,0,0) \in S\}$ であることを示せ．
   (3) S の向きを，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) := (0,0,1)$ $(\forall \boldsymbol{u} \in S)$ となる法ベクトルで定める．このとき，(2) の座標は向きを保つことを示せ．また，$\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \partial S$, $\boldsymbol{l}(t) := (t,0,0)$ は $\boldsymbol{n}$ から誘導される ∂S の向きを表すことを示せ．
   (4) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (e^{-x^2},\ x,\ 0)$ に対し，$\displaystyle\int_{\partial S} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．“$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$” は有限か？
8. $S \subset \mathbb{R}^3$ を曲面とし（境界はあってもなくてもよい），$\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ を局所座標とする．$\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上の曲線 $\boldsymbol{l}\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \boldsymbol{\varphi}(U)$ が与えられたとき，U 上の曲線 $\boldsymbol{m}\colon (-\epsilon,\epsilon) \to U$ を $\boldsymbol{m} := \boldsymbol{\varphi}^{-1} \circ \boldsymbol{l}$ で定義する．
   (1) $\boldsymbol{m}(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{pmatrix}$ と書く．$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ を $m_1'(t), m_2'(t)$ と $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}(\boldsymbol{m}(t)), \dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\boldsymbol{m}(t))$ を用いて表わせ．（7/21 の講義で使います）
   (2) $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{l}(0)$ とおく．$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(0) \in T_{\boldsymbol{u}_0}S$ であることを示せ．
9. 形式的に “$\nabla := (\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z})$” とおくとき，次の形式的な「等式」を示せ．
   (1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，“$\nabla\cdot\boldsymbol{V} = \mathrm{div}\boldsymbol{V}$”
   (2) C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対し，“$(\nabla\cdot\nabla)f = \Delta f$”（演習 12. 1 参照）

（提出の必要はありません）

補足：境界に導かれる向き（定義 **94**）について．

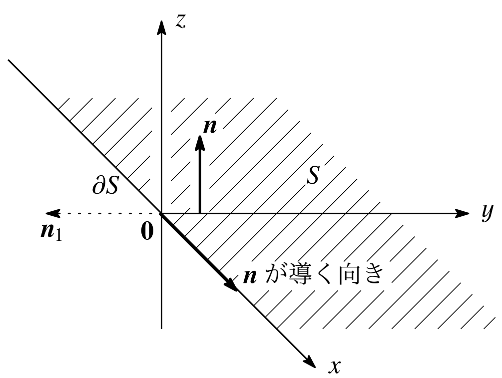
また向きに関してややこしい話が出てきて辟易しますが，Stokes の定理を定理 97 の形で成り立たせるためには，向きのついた曲面 $(S, \boldsymbol{n})$ に対して，∂S の向きを正しく定めないといけません．それが定義 94 の「$\boldsymbol{n}$ が ∂S に導く向き」です．定義 94 と同じ内容を，次のようにも言い換えられます（各自確かめてください）:

$(S, \boldsymbol{n})$ を向きづけられた境界つき曲面とし，$\boldsymbol{u} \in \partial S$ のまわりの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon W \to \mathbb{R}^3$ で向きを保つものを取ります．$U := W \cap \mathbb{H}^2$ とおくとき $\boldsymbol{\varphi}(U) \subset S$ で，$\forall \boldsymbol{a} \in U$ に対し

$$(\partial_s \boldsymbol{\varphi} \times \partial_t \boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{a}) = k \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}))$$

をみたす定数 k が存在します．$\boldsymbol{\varphi}$ が向きを保つとは，任意の $\boldsymbol{a} \in U$ に対し $k > 0$ となるということです．$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u}$ となる $\boldsymbol{a} \in U$ を取るとき，$\boldsymbol{u} \in \partial S$ であることから，$\boldsymbol{a} = (s_0, 0) \in \partial\mathbb{H}^2$ という形です．十分小さい $\epsilon > 0$ に対し，$\boldsymbol{l}\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \partial S$ を $\boldsymbol{l}(t) := \boldsymbol{\varphi}(t - s_0, 0, 0)$ とおけば，$\boldsymbol{l}$ は $\boldsymbol{n}$ が導く ∂S の向きを表します．
さらに言い換えると，$\boldsymbol{n}$ が導く ∂S の向きとは，上のような座標について $\partial_s \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})$ の方向である，とも言えます．

特別な場合として，$S := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0\}$ について考えましょう（下図参照）．平面 $z = 0$ を xy 平面とみなし，その中に含まれる上半平面を S としたわけです．境界 ∂S は x 軸です．向きを $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) := (0, 0, 1)$ $(\forall \boldsymbol{u} \in S)$, つまり z 座標の正の方向と定めたとき，$\boldsymbol{n}$ が ∂S に導く向きは，x 軸の正の方向です．



7/14 の問題 7. (2), (3) あたりも参照してください．

より平たく，次のようにも言えます：$\boldsymbol{n}$ が指し示す向きが「上」になるように ∂S 上に立つことを想像してください．$\boldsymbol{n}$ が導く向きに沿って ∂S 上を歩くと，左手側に曲面が見えます．右手側は曲面が途絶えています．
2 次元の場合に出てきた「領域の境界としての曲線の向き」との共通点に気づくでしょうか．

向きは数学の至るところで問題を引き起こすもので，避けては通れない問題です．「幾何入門」の場合は，積分の値の正負を決めるためにどうしても必要なものです．

幾何入門 レポート問題 **13**（**2017** 年 **7** 月 **14** 日）

担当：境 圭一

$S := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$ は境界つき曲面である（証明不要）．S の向きを $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}$ ($\forall \boldsymbol{u} \in S$) で与える．$\boldsymbol{V}(x,y,z) := (ye^z, -xe^z, z)$ に対し，$\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

（7/21 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html