幾何入門 演習問題 14（2017 年 7 月 21 日）

担当：境 圭一

1. $\mathbb{R}^3$ から x 軸を除いて得られる領域を Ω とおく．
   (1) Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) = \dfrac{(0, -z, y)}{y^2+z^2}$ に対し，rot$\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (2) $L := \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2=1\}$ とおく．L を図示せよ．L を表す周期的な正則パラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を適当に定めて，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．grad$(f) = \boldsymbol{V}$ となるような C^∞ 級関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は存在するか？
   (3) $\mathbb{R}^3$ 内の向きづけ可能な境界つきコンパクト曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ で，$\partial S = L$ となるものを考える．$S \not\subset \Omega$ であることを示せ（ヒント：Stokes の定理）．

※以下，今までの復習と補足です

2. $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y/2)^2 + (z/3)^2 = 1\}$ とおく．
   (1) S は向きづけ可能な曲面であることを示し，S の概形を図示せよ．
   (2) 各 $\boldsymbol{u} \in S$ に対し，$T_{\boldsymbol{u}}S$ ならびに $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ を表す方程式を求めよ．
   (3) S の向き $\boldsymbol{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{n}(1,0,0) = (1,0,0)$ をみたすものを求めよ．
   (4) $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (x^3 + xyz - xy^2,\, y - y^2z + y^3,\, (yz^2/2) - 3zx^2 - y^2z)$ と $\boldsymbol{W}(x,y,z) := \dfrac{(x,\, y-1,\, z)}{(x^2+(y-1)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ と $\displaystyle\int_S \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし S の向きは (3) のものとする．
3. $f(x,y,z) := x^2 + (y-1)^2 - (z+2)^2 - 1$ とおく．
   (1) $S := f^{-1}(0)$ は向きづけ可能な曲面であることを示し，S の概形を図示せよ．
   (2) $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in S$ とする．$T_{\boldsymbol{u}}S$ ならびに $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ を表す方程式を求めよ．
   (3) $S' := S \cap \{-3 \le z \le -1\}$ とおく．S' は境界つき曲面であることを示せ．$\partial S'$ を求めよ．
   (4) $\boldsymbol{n}(1,1,-2) = (1,0,0)$ となる S の向きが $\partial S'$ に導く向きを求めよ．
   (5) $\boldsymbol{V}(x,y,z) := ((1-y)(z+2), x\sin(\frac{\pi z}{2}), z^2)$ に対し，$\displaystyle\int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
4. 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上の 3 変数 C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ について，Ω 上いたるところ grad$(f) = \boldsymbol{0}$ であるとき，f はどんな関数か？
5. (1) $S := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/2)^2 + y^2 \le 1\}$ は境界つきコンパクト曲面であることを示せ．∂S を求めよ．
   (2) S の向きを $\boldsymbol{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{n}(x,y,0) := (0,0,1)$ $(\forall(x,y,0) \in S)$ で与える．∂S を表す周期的な正則パラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to S$ で，$\boldsymbol{n}$ が導く ∂S の向きを表すものを 1 つ求めよ．
   (3) S と $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (V_1(x,y), V_2(x,y), 0)$ の形のベクトル場に対し Stokes の定理を適用し，得られた等式と 2 次元の場合の Green の公式（講義の定理 51）を比較せよ．
6. （やや難，教科書の §3.3 参照）$\boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{m}(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ で定義し，$\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \boldsymbol{m}(\mathbb{R})$ とおく．
   (1) 一般に，$\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ に対し，$\mathrm{rot}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}) = (\mathrm{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{grad}(W_i))_{i=1}^3$ を示せ．
   (2) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u};t) := \dfrac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)}{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)|^3}$ は t に依存する Ω 上のベクトル場である．$t \in \mathbb{R}$ を固定するとき，div$\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (3) 一般に，$t \in \mathbb{R}$ に依存するベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u};t) := (V_i(\boldsymbol{u};t))_{i=1}^3$ に対し，$\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u};t)\,dt := \Big(\int_a^b V_i(\boldsymbol{u};t)\,dt\Big)_{i=1}^3$ は 3 次元ベクトル場である．Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)}{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)|^3} \times \frac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)\,dt$ に対し，rot$\boldsymbol{B}$ を求めよ．
   (4) $n \in \mathbb{N}$ に対し，周期 1 の滑らかな閉曲線 $\boldsymbol{l}_n(t)$ を，$|t| \le \dfrac{1}{4}$ のとき $\boldsymbol{l}_n(t) = (0,0,4nt)$, また $\dfrac{1}{4} \le t \le \dfrac{3}{4}$ のとき $|\boldsymbol{l}_n(t)| \ge 4n$ をみたすように選ぶ．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\boldsymbol{l}_n} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}_n$ を計算せよ．
   (5) Ω は単連結ではないことを示せ．

（提出の必要はありません）

補足：「閉曲線が一点に縮む」ということの定義． 詳細は「トポロジー」で学びます．ここでは概略だけ述べておきます．

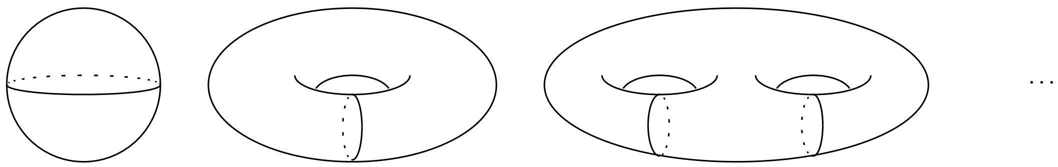
一般に，曲線 $\boldsymbol{l}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ の**連続変形**（ホモトピー (homotopy) という）とは，連続写像 $\boldsymbol{h}\colon [0,1]\times[a,b] \to \mathbb{R}^n$ で，任意の $t \in [a,b]$ に対し $\boldsymbol{h}(0,t) = \boldsymbol{l}(t)$ となるようなものをいいます．$\boldsymbol{h}$ が連続とは，$\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ と書いたとき，各 h_k が 2 変数の連続関数であることを指します．$\boldsymbol{l}_s(t) := \boldsymbol{h}(s,t)$ とおくと，各 $s \in [0,1]$ に対し $\boldsymbol{l}_s\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ は曲線で，s を動かすと，$\boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{l}$ から始まって「連続的に」$\boldsymbol{l}_1$ まで変形していくわけです．

閉曲線 $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ が**連続変形で一点に縮む**とは，連続変形 $\boldsymbol{l}_s$ $(0 \le s \le 1)$ で $\boldsymbol{l}_1$ が**定値写像**となる，つまり $\boldsymbol{l}_1(t) = \boldsymbol{u}_0$ $(\forall t \in \mathbb{R}^1)$ となるものが存在することをいいます．もとの曲線 $\boldsymbol{l}$ が連続変形 $\boldsymbol{l}_s$ により変形していき，最後に 1 点 $\boldsymbol{u}_0$ に「つぶれる」様子を思い浮かべてみてください．

補足：向きづけ可能な境界つきコンパクト曲面の分類

講義で主に扱った球面とか双曲面（の一部）の他にも曲面はいろいろあります．実は 19 世紀中には，曲面の分類は完了しています．ここでは向きづけ可能でコンパクトなものだけリストアップしてみます．

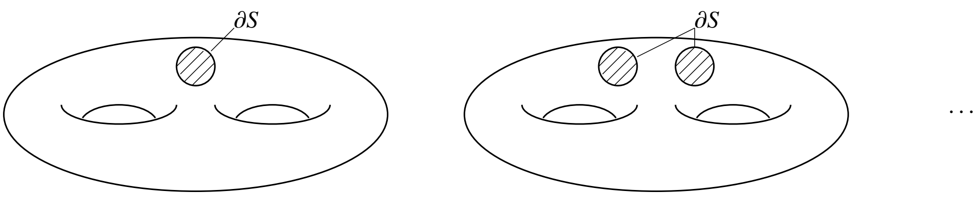
まず $\partial S = \emptyset$ の場合は，S は閉曲面であり，以下に図示する Σ_g $(g = 0, 1, 2, \ldots)$ のいずれかになります：



$\Sigma_0 = S^2$ $\Sigma_1 = T$ Σ_2

g は**種数** (genus) と呼ばれます．$g \ge 3$ の場合の Σ_g の絵も類推されると思います．

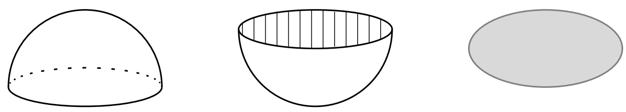
$\partial S \neq \emptyset$ の場合は，上の絵から「小円板」をいくつかくりぬいたものになります．例えば Σ_2 から「小円板」をくりぬいて得られる境界つき曲面は以下のいずれかになります：



$\Sigma_{2,1}$ $\Sigma_{2,2}$

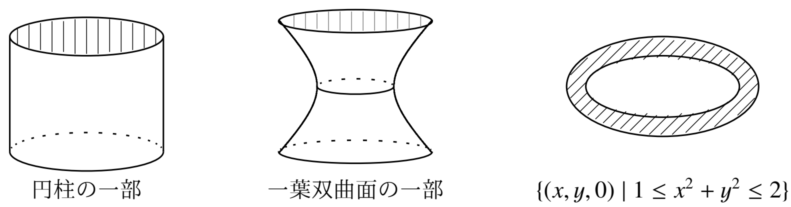
$\Sigma_{g,k}$ $(g, k \ge 0)$ の絵も類推されると思います．$\partial\Sigma_{g,k}$ は k 個の円周からなります．向きづけ可能コンパクト曲面がこのようなものに限る，というのは，例えば**ホモロジー論**の応用として得られる結果です．

「いずれかになる」ということの正確な意味は，全ての向きづけ可能コンパクト曲面は $\Sigma_{g,k}$ $(\exists g, k \ge 0)$ のいずれかに**同相**である，ということです．用語の意味は**位相空間論**で学びます．同じ $\Sigma_{g,k}$ であっても，$\mathbb{R}^3$ の部分集合として実現する方法は様々です．**多様体論**の言葉を使うと，g, k を一つ固定したとき，**埋め込み** $\Sigma_{g,k} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ は複数ある，ということです．例えば次の絵は，$\Sigma_{0,1}$ を $\mathbb{R}^3$ の部分集合としていろいろな方法で実現したものです：



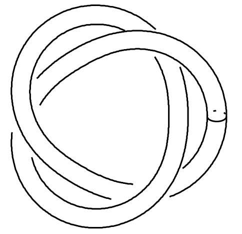
$S^2 \cap \{z \ge 0\}$ $S^2 \cap \{z \le 0\}$ $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

また次の絵は，$\Sigma_{0,2}$ を $\mathbb{R}^3$ の部分集合としていろいろな方法で実現したものです：



円柱の一部 一葉双曲面の一部 $\{(x, y, 0) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$

他にも，例えばトーラス Σ_1 を $\mathbb{R}^3$ の部分集合として次のように実現することもできます：



幾何入門 レポート問題 **14**（**2017** 年 **7** 月 **21** 日）

担当：境 圭一

$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + x^2 > 1\}$ は単連結でないことを示せ．（ヒント：7/21 の問 1 参照）

※ **7/27**（木）**17:00** までに研究室 (A403) のレポートボックスに提出してください．レポート 13, 14 とも，採点が終わり次第，研究室前で返却します．

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html`