

● Ω は, y 軸に半径 1 の円板の分だけ「太さ」をつけたものを \mathbb{R}^3 から取り除いて得られる領域です. Ω が単連結でないことは, 演習 14.1 と同様に示されます.

多かった誤りは " $\mathbf{l}(t) := (\cos t, 0, \sin t)$ を考えると..." というものです. この \mathbf{l} が表す閉曲線は Ω に入っていません. Ω をこの講義でいう「領域」(弧状連結な開集合のこと) にするため, 不等号に等号を入れませんでした.

また, \mathbf{V} は 3 次元ベクトル場なので, $\text{rot}\mathbf{V}$ も 3 次元ベクトル場です. 関数 (スカラー場) になっている人がいます.

● 講義でやった定理 100 は

「 Ω が単連結であるとき, Ω 上の ベクトル場 \mathbf{V} について,

$$\text{rot}\mathbf{V} = \mathbf{0} \iff \underline{\Omega \text{ 内の任意の閉曲線 } L} \text{ について } \int_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

というものです. 下線の条件を省略してはいけません. 省略すると全く正しくない主張になります.

● 意味が正しく伝わる書き方を考えてください. 良くない例の一つ挙げます:

(良くない) 定理 100 より, Ω が単連結なら $\text{rot}\mathbf{V} = \mathbf{0} \implies$ 任意の閉曲線 L に対し $\int_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = 0$ が成り立たないので, Ω は単連結ではない

この文章は言いたいことを正しく伝えていません. 意味のまとまり, あるいは区切りが明確でないからです. 例えば

- 「定理 100 より, ...が成り立たない」は, 「...が成り立たない根拠が定理 100 である」と言っているように読める. 実際はそうでなく「 Ω が単連結ではありえないことの根拠 (の一つ) が定理 100 である」というのが正しい.
- 「 Ω が単連結なら $\text{rot}\mathbf{V} = \mathbf{0}$ 」が一つのまとまりにも見える (が, これは明らかに正しくない). また「任意の閉曲線 L に対し $\int_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = 0$ が成り立たない」の部分は
 - (i) 「任意の閉曲線 L に対し $\int_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 」が成り立たない
 - (ii) 任意の閉曲線 L に対し, $\int_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = 0$ が成り立たない
 のどちらなのか不明. (i) は L によって 0 だったりそうでなかったりするということで, (ii) はどの L についても 0 以外の値である, という事.

他にも理由は挙げられるかもしれません.

次のように書けば正しく伝わると思います:

\mathbf{V} は $\text{rot}\mathbf{V} = \mathbf{0}$ をみたすが, Ω 内のある閉曲線 L に対し $\int_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ である. よって定理 100 より, Ω は単連結ではありえない.

なるべく肯定文で書いたほうがいいのかもかもしれません.

(7/27)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html