特に断らなければ $\boldsymbol{u} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とし，関数やベクトル場は全て C^∞ 級のものとする．ベクトルは縦横のどちらで書いても差し支えない．要点が押さえられていれば，必ずしも全ての計算過程を書く必要はない．

1. (1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ．また，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積を求めよ．
   (2) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(\boldsymbol{u}) := \dfrac{x-1}{1+x^2+4y^2}$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ．（答のみでよい）
   (3) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} \cos x + \sin y \\ \sin x - \cos y \end{pmatrix}$ に対し，$(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ．（答のみでよい）
   (4) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x - xy^2 \\ y - x^2 y \end{pmatrix}$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{W}$ の最大値と，最大値を与える $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ．
   (5) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は恒等的に 0 の関数ではなく，$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2g$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -k^2 g$ をみたすとする（ただし $k \in \mathbb{R}$ は定数），$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(g))$ が恒等的に 0 となるような k を全て求めよ．

2. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 \\ x^2 y - y^3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 3x^2 - 4y \\ 4x - 3y^2 \end{pmatrix}$ を考える．
   (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}, \mathrm{rot}\boldsymbol{V}, \mathrm{div}\boldsymbol{W}, \mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ を求めよ．（答のみでよい）
   (2) 関数 $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で $\mathrm{grad}(f) = \boldsymbol{V}$ をみたすものは存在するか？存在するならば f を一つ求め，存在しないならばそのことを証明せよ．
   (3) 関数 $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で $\mathrm{grad}(g) = \boldsymbol{W}$ をみたすものは存在するか？存在するならば g を一つ求め，存在しないならばそのことを証明せよ．
   (4) 曲線のパラメータ $\boldsymbol{l} \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (5) 曲線のパラメータ $\boldsymbol{m} \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{m}$ を計算せよ．

3. $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$ とおく．
   (1) $\partial\Omega$ を表す区分的に正則なパラメータ $\boldsymbol{l} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，周期的かつ Ω の境界の向きを表すものを一つ与えよ．それが条件を満たす事の証明は省いてよい．
   (2) (1) で求めた $\boldsymbol{l}$ と，ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{2xy}{1+x^2y^2}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．ただし (1) の $\boldsymbol{l}$ の周期を T とするとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ の積分区間は $[0, T]$ である．
   (3) (1) で求めた $\boldsymbol{l}$ と，ベクトル場 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^9 - x^8 y + x^6 y^3 + 6x^4 y^5 - 4x^2 y^7 \\ 4x^7 y^2 - x^5 y^4 - 4x^3 y^6 + xy^8 + y^9 \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, dl$ を計算せよ．積分区間については (2) と同様である．

4. $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ とし，Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2+4y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ で定義する．
   (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}, \mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を求めよ．（答のみでよい）
   (2) 整数 n に対し，$\boldsymbol{l}_n \colon \mathbb{R} \to \Omega$ を $\boldsymbol{l}_n(t) := \begin{pmatrix} 2\cos t + 4n - 1 \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ で定義する．$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}_n} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_n$ を求めよ．

配点：15, 15, 12, 8 (**1**: $3 \times 5 = 15$,　**2**: $3 \times 5 = 15$,　**3**: $4 \times 3 = 12$,　**4**: $4 + 4 = 8$)