幾何入門 中間試験（2017 年 6 月 9 日）解答例

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. 平行六面体の体積は，$\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{pmatrix}\right| = |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| = 2$.

   (2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\pm\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$.

   (3) $x \pm y = 2\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$ となる全ての $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

   (4) $(\mathrm{div}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{u}) = 2-(x^2+y^2) = 2-|\boldsymbol{u}|^2$ である．$|\boldsymbol{u}|^2 \geq 0$ だから $(\mathrm{div}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{u}) \leq 2$ で，等号は $\boldsymbol{u}=0$ のとき成立．したがって，$\mathrm{div}\boldsymbol{W}$ は $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ において最大値 2 を取る．

   (5) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(g)) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ である．$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \dfrac{\partial(2g)}{\partial x} = 4g$ となるから $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(g)) = (4-k^2)g$. これが恒等的に 0 になるのは $k=\pm 2$ のとき．

2. (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 4x^2-2y^2$,　$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$,　$\mathrm{div}\boldsymbol{W} = 6(x-y)$,　$\mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 8$.

   (2) $f(\boldsymbol{u}) := \dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2y^2}{2}-\dfrac{y^4}{4}$ とおくと $\mathrm{grad}(f) = \boldsymbol{V}$.

   (3) $\mathrm{rot}\boldsymbol{W}\neq 0$ だから，$\mathrm{grad}(g) = \boldsymbol{W}$ となる g は存在しない．

   (4) (2) より
$$\int_l \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = f(\boldsymbol{l}(\pi)) - f(\boldsymbol{l}(0)) = f\begin{pmatrix}\pi\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \frac{\pi^4}{4}.$$

   (5) $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{m}(t))\cdot\dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t) = \begin{pmatrix}3\cos^2 t-4\sin t\\4\cos t-3\sin^2 t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\end{pmatrix} = -3\cos^2 t\sin t - 3\sin^2 t\cos t + 4$ だから
$$\int_l \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^{\pi}(-3\cos^2 t\sin t - 3\sin^2 t\cos t+4)\,dt = \left[\cos^3 t - \sin^3 t + 4t\right]_0^{\pi} = 4\pi - 2.$$

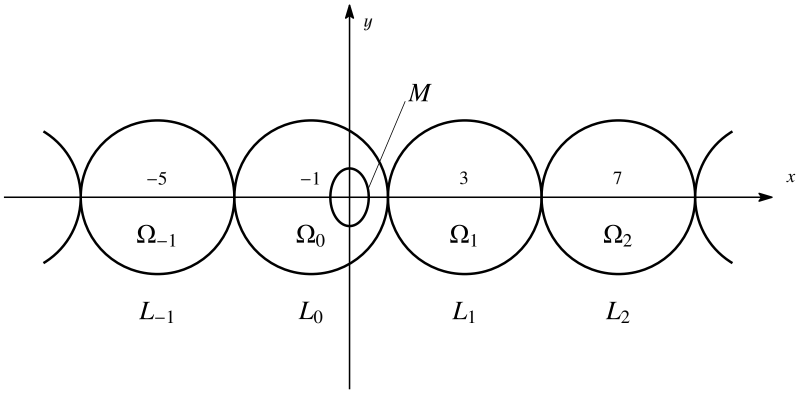
3. (1) $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を，$n\in\mathbb{Z}$ に対し
$$\boldsymbol{l}(t) = \begin{cases}(-t+4n+1,\ t-4n) & 4n\leq t\leq 4n+1,\\ (-t+4n+1,\ -t+4n+2) & 4n+1\leq t\leq 4n+2,\\ (t-4n-3,\ -t+4n+2) & 4n+2\leq t\leq 4n+3\\ (t-4n-3,\ t-4n-4) & 4n+3\leq t\leq 4n+4\end{cases}$$
   で定める．$\boldsymbol{l}$ は周期 4 の写像で $\boldsymbol{l}(\mathbb{R}) = \partial\Omega$ であり，$t\notin\mathbb{Z}$ において C^∞ 級で $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\neq\boldsymbol{0}$ だから，$\boldsymbol{l}$ は区分的に正則である．（※答は他にもあります）

   (2) $f(\boldsymbol{u}) := \log(1+x^2y^2)$ とすると $\mathrm{grad}(f) = \boldsymbol{V}$ だから，$\displaystyle\int_l \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = f(\boldsymbol{l}(4)) - f(\boldsymbol{l}(0)) = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0$.

   (3) $\boldsymbol{W}$ は Ω 上で定義されているから，Gauss の発散定理より
$$\int_l \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}\,dl = \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{W}\,dxdy \tag{$*$}$$
   $\mathrm{div}\boldsymbol{W} = 9x^8+2x^5y^3+9y^8$ である．x^5y^3 は x,y に関して奇関数だから，Ω の対称性により $\displaystyle\int_\Omega x^5y^3\,dxdy = 0$. x^8+y^8 は x,y に関して偶関数であるから，$\Omega_+ := \{\boldsymbol{u}\in\Omega \mid x,y\geq 0\}$ とおくと，
$$\begin{aligned}(*) = \int_l \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}\,dl &= \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{W}\,dxdy\\ &= 9\int_\Omega (x^8+y^8)\,dxdy = 36\int_{\Omega_+}(x^8+y^8)\,dxdy = 72\int_{\Omega_+}x^8\,dxdy\\ &= 72\int_{y=0}^1\left(\int_{x=0}^{1-y}x^8\,dx\right)dy = 8\int_0^1(1-y)^9\,dy = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

4. (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = -\dfrac{6xy}{(x^2+4y^2)^2}$,　$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$.

(2) $\boldsymbol{l}_n$ で表される曲線 L_n を境界とする有界領域を Ω_n とする．



$\mathbf{0} \in \Omega_n$ となるのは $n = 0$ のときに限る．よって $n \neq 0$ のとき，$\boldsymbol{V}$ は Ω_n 上で定義されるから，Green の定理と (1) より

$$\int_{\boldsymbol{l}_n} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_n = \int_{\Omega_n} \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\, dxdy = 0 \quad (n \neq 0).$$

$\epsilon > 0$ を十分小さく取ると，$\boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{m}(t) := \epsilon\begin{pmatrix} 2\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} = \epsilon\begin{pmatrix} 2\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ で表される楕円 M は Ω_0 の内部に含まれ，L_0 と M で囲まれる有界領域を Ω' とおけば，$\boldsymbol{l}_0, \boldsymbol{m}$ は Ω' の境界としての L_0, M の向きを表す．$\mathbf{0} \notin \Omega'$ だから，Ω' 上で Green の定理を使うと

$$\int_{\boldsymbol{l}_0} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_0 + \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m} = \int_{\Omega'} \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\, dxdy = 0.$$

一方

$$\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\epsilon^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, \epsilon\begin{pmatrix} \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \cdot \epsilon\begin{pmatrix} -2\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = -\pi.$$

よって

$$\int_{\boldsymbol{l}_0} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}_0 = \pi.$$

配点：15, 15, 12, 8 (**1**: $3 \times 5 = 15$,　**2**: $3 \times 5 = 15$,　**3**: $4 \times 3 = 12$,　**4**: $4 + 4 = 8$)

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_geometry/17_geometry.html`