ベクトルは縦横のどちらで書いても差し支えない．$\partial_x f := \dfrac{\partial f}{\partial x}$ のような略記は断りなく用いてよい．

1. (1) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を 1 次独立なベクトルとする．$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対し，$(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) \times (c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = p\boldsymbol{u} + q\boldsymbol{v} + r(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ となるような $p, q, r \in \mathbb{R}$ を a, b, c, d を用いて表せ．（答のみでよい）

   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 + 2zx + 4x \\ yz^2 + 4xy + 9y \\ zx^2 + 6yz + z \end{pmatrix}$ に対し，$(\mathrm{div}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．（答のみでよい）

   (3) ベクトル場 $\boldsymbol{W}(x, y, z) := \begin{pmatrix} zx + xy \\ xy + yz \\ yz + zx \end{pmatrix}$ に対し，$(\mathrm{rot}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．（答のみでよい）

   (4) 関数 $f(x, y, z) := \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．（答のみでよい）

   (5) 関数 $g(x, y, z) := e^{ax+by+cz}$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(g))$ を計算せよ．ただし $a, b, c \in \mathbb{R}$ は定数とする．（答のみでよい）

2. $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z$ とおき，$S := f^{-1}(-13)$ とする．

   (1) $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．

   (2) S は曲面であることを示せ．

   (3) $\boldsymbol{v} = (a, b, c) \in S$ に対し，部分ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{v}}S \subset \mathbb{R}^3$ を表す方程式を求めよ．

   (4) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in T_{\boldsymbol{w}}^{\perp}S$ となるような $\boldsymbol{w} \in S$ をすべて求めよ．

   (5) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし S の向きは，S が囲む有界領域 Ω の内側から外側に向かう法ベクトルで与える．

3. 2 変数 C^∞ 級関数 $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し $h(x, y) > 0$ をみたし，さらに $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおいて r, θ の関数とみたとき，h は r に関して単調減少であるとする．このとき

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ -1 \leq z \leq h(x, y)\}$$

   は境界つきコンパクト曲面である（証明不要）．

   (1) S の向き $\boldsymbol{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ をみたすように与える．$\partial_- S := \{(x, y, -1) \in S\}$ を表す周期的な正則パラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{n}$ により導かれる向きを表すものを 1 つ求めよ．

   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) := \dfrac{1}{x^2 + 9y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し，$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を求めよ．（答のみでよい）

   (3) $\partial_+ S := \{(x, y, z) \in S \mid z = h(x, y)\}$ とおき，$\partial_+ S$ を表す周期的な正則パラメータ $\boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ で，(1) の $\boldsymbol{n}$ により導かれる向きを表すものを取る．(2) の $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m}$ を計算せよ．

4. $S \subset \mathbb{R}^3$ は閉曲面で，有界領域 Ω を囲むとする．S の向きを，Ω の内側から外側に向かう法ベクトルで与える．

   (1) 3 変数 C^∞ 級関数 $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対し，次の等式を示せ．

$$\int_S (g \cdot \mathrm{grad}(f)) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_\Omega (\mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{grad}(g) + g \cdot \Delta f)\,dxdydz$$

   ただし，3 変数 C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対し, $\Delta f := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ である．

   (2) 3 変数 C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は Ω 上で $\Delta f = 0$ を満たし，さらに S 上で $f = 0$ であるとする．このとき，Ω 上で $f = 0$ であることを示せ．

配点：15, 15, 12, 8　(**1**: $3 \times 5 = 15$,　**2**: $3 \times 5 = 15$,　**3**: $4 + 3 + 5 = 12$,　**4**: $3 + 5 = 8$)